>>Je découvre
le monde des mathématiques

L'histoire d'un théorème

Pythagore serait né dans l'île de Samos (Grèce) au cours du VIe siècle avant J.-C.

Il a fondé une importante école à Crotone (Italie du sud, colonie grecque à l'époque).

Pythagore et ses nombreux disciples y étudiaient les mathématiques, la philosophie, l'astronomie, la musique, la politique… On ne connaît ses inventions qu'à travers les écrits de ses disciples.

Pythagore serait mort lors de l'incendie de son école, provoqué par une insurrection populaire.

La propriété appelée « Théorème de Pythagore » était pourtant utilisée bien avant cette époque : par les Babyloniens (voir ci-dessous), par les Égyptiens (voir page 201).

▲ Tablette Plimpton 322.

« Plimpton 322 » est une tablette en argile cuite d'origine babylonienne (–1800 avant J.-C.).

Elle est constituée de nombres écrits en base soixante ;

le clou correspond à l'unité et le chevron $<$ à la dizaine.

EXEMPLE : Le nombre babylonien 

correspond à **52 soixantaines** et **26 unités** ;

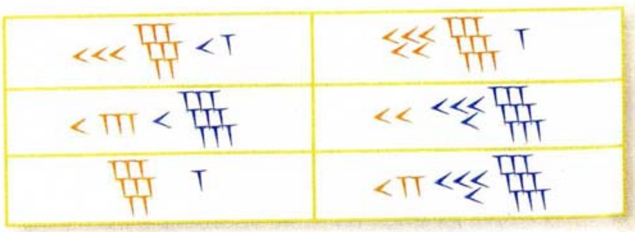
c'est-à-dire au nombre décimal : $52 \times 60 + 26 = 3\,146$.

Cette tablette permet de trouver des **triplets pythagoriciens** : c'est-à-dire **trois nombres entiers a, b et c** tels que : $a^2 + b^2 = c^2$.

83 La partie encadrée de cette tablette a été agrandie et reproduite ci-dessous.

La partie **orange** correspond au nombre de **soixantaines**, celle en **violet**, au nombre d'**unités**.

▲ Agrandissement de la partie encadrée.



▲ Transcription de la partie encadrée.

Pour chaque ligne de la partie encadrée, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer le nombre décimal correspondant au nombre babylonien de la première colonne.

Ce nombre correspond à la largeur d'un rectangle.

2) Déterminer le nombre décimal correspondant au nombre babylonien de la seconde colonne.

Ce nombre correspond à la diagonale de ce même rectangle.

3) Vérifier que la longueur de ce rectangle est un nombre entier.

Solutions p. 301

Chapitre 12

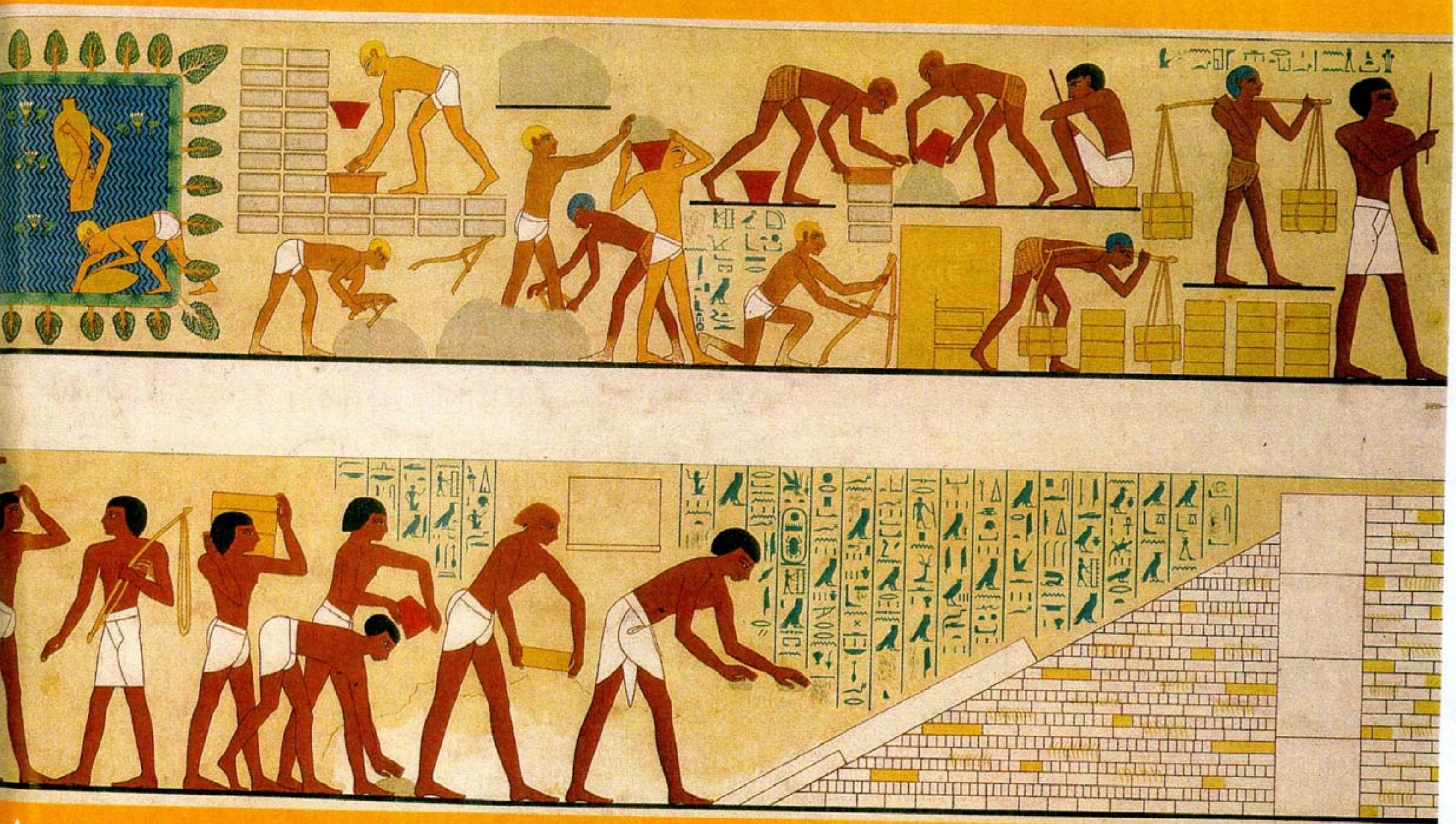
Le théorème de Pythagore et sa réciproque

DÉCOUVRIR

- le théorème de Pythagore ;
- l'utilisation de la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice ;
- comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle ;
- comment démontrer qu'un triangle est rectangle.

APPLIQUER

- au calcul de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle ;
- à la reconnaissance d'un triangle rectangle connaissant la longueur de ses côtés.



Construction d'un temple. Égypte, peinture Nouvel Empire, 18e dynastie ; tombe de Rekhmara.

2 000 ans avant J.-C., les Égyptiens utilisaient une corde pour construire des angles droits.

Sur cette corde, ils réalisaient 13 nœuds espacés de la même distance (figure 1).

Ils utilisaient des piquets, qu'ils enfonçaient dans ces nœuds, pour former des triangles (figure 2).

figure 1

figure 2

1) Quelle est la longueur d'une corde à 13 nœuds, sachant que les nœuds sont espacés de 1 cm ?

2) a) Tracer tous les triangles que l'on peut construire avec cette corde, chaque sommet devant correspondre à un noeud.

b) Quelle semble être la nature de chacun de ces triangles ?

1 Je découvre une propriété du triangle rectangle

Cette activité est à réaliser avec un logiciel de géométrie (Cabri).

■ A : Construction d'un triangle rectangle

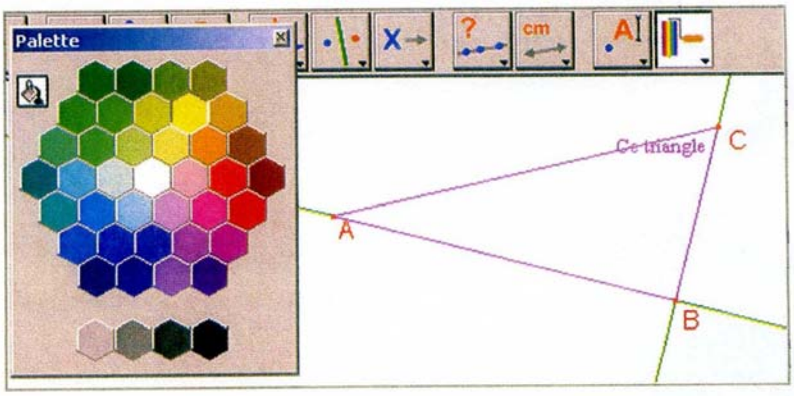
Placer deux points A et B.

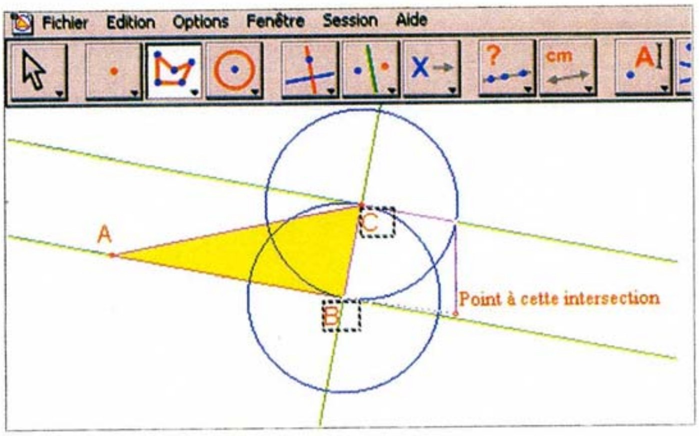
Tracer la droite passant par les points A et B.

Tracer la droite (d) passant par le point B et perpendiculaire à la droite (AB).

Placer un point C appartenant à la droite (d).

Tracer le triangle ABC et le colorier en jaune.





■ B : Construction d'un carré de côté $[BC]$

Tracer la droite passant par le point C et perpendiculaire à la droite (BC).

Tracer le cercle de centre C passant par B.

Tracer le cercle de centre B passant par C.

Tracer le carré de côté $[BC]$ ne coupant pas le triangle ABC. Le colorier en vert.

J'ai tracé un polygone en désignant ses sommets. Il faut fermer le polygone en cliquant de nouveau sur le premier sommet.

■ C : Construction de la figure complète

Construire le carré de côté $[AB]$ ne coupant pas le triangle ABC.

Colorier en vert ce carré.

Masquer les droites et les cercles utiles à la construction de ces carrés.

Construire le carré de côté $[AC]$ ne coupant pas le triangle ABC.

Colorier en rouge ce carré et masquer les droites et les cercles utiles à sa construction.

■ D : Conjecture

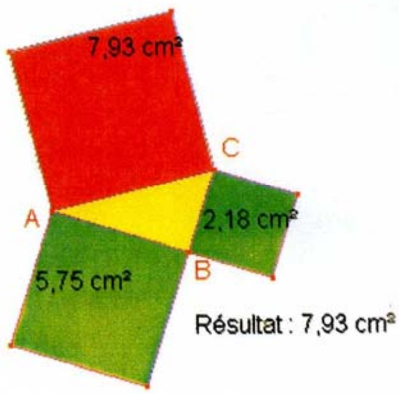
1) Mesurer l'aire de chacun des carrés coloriés.

2) Utiliser la calculatrice du logiciel pour calculer la somme des aires des deux carrés verts.

Afficher, en le déplaçant, le résultat de cette somme.

3) Déplacer les points A, B ou C.

Faire une conjecture concernant les aires des carrés verts et celle du carré rouge.



2 Je définis la racine carrée d'un nombre

1) Recopier et compléter le tableau sachant que :

- chaque case bleue contient un nombre positif ;
- chaque case jaune contient un nombre négatif.

a	2	-3		-10					0,3	
a^2			25		4	81	81	1		0,25

2) 9 et (-9) sont les deux nombres ayant pour carré 81.

Par définition, la racine carrée de 81 est le nombre positif dont le carré est 81.

Ainsi, la racine carrée de 81 est 9. On note : $\sqrt{\mathbf{81}} = \mathbf{9}$.

Quelle est la racine carrée de 4 ? de 36 ? de 49 ?

J'ai regardé page 217.

3) Utiliser la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice pour calculer 12,25.

3 Je fais une conjecture concernant le triangle rectangle

A : Construction du plateau de jeu

Voir le modèle représenté par la figure 1.

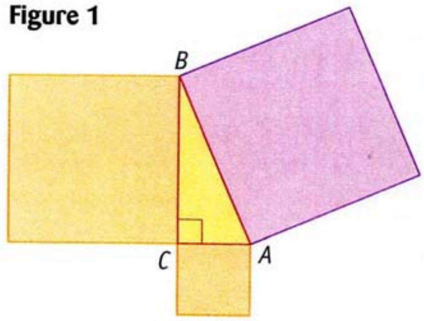
Construire un triangle ABC rectangle en C tel que :

$BC = 7$ cm et $AC = 3$ cm.

Construire trois carrés de côtés respectifs AB, AC et BC.

Colorier la figure obtenue en respectant les couleurs.

Figure 1



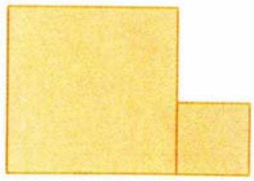
B : Construction des pièces du puzzle

Voir le modèle représenté par la figure 2.

Reproduire côte à côte, sur une autre feuille, deux carrés de cotés respectifs 7 cm et 3 cm.

Colorier en orange la figure obtenue.

Figure 2



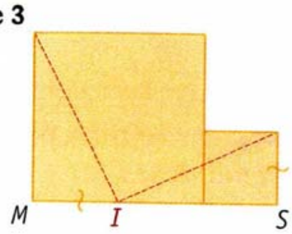
Voir le modèle représenté par la figure 3.

Placer le point I du segment $[MS]$ tel que : $MI = 3$ cm.

Découper la figure, puis découper suivant les traits pointillés.

On obtient ainsi cinq pièces d'un puzzle.

Figure 3



C : Manipulation

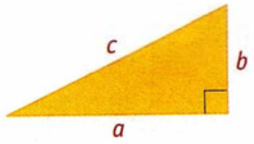
1) Disposer les cinq pièces du puzzle sur le plateau de jeu afin de recouvrir les deux carrés orange.

2) Disposer les cinq pièces du puzzle sur le plateau de jeu afin de recouvrir le carré violet.

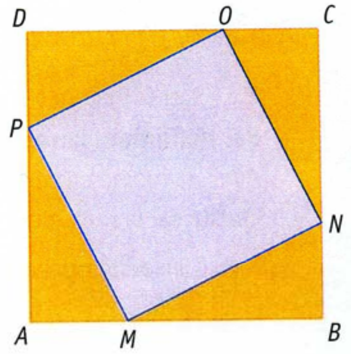
3) Faire une conjecture concernant l'aire du carré violet et celle des carrés orange.

4 Je démontre le théorème de Pythagore

a et b sont deux nombres positifs donnés.
On a construit, puis découpé, huit triangles rectangles identiques orange.
On note c la longueur de l'hypoténuse de ces triangles.



A : On a construit un carré *ABCD* de côté de longueur $a + b$.



1) Justifier que l'on peut coller quatre triangles orange à l'intérieur de ce carré, comme l'indique la figure ci-contre.

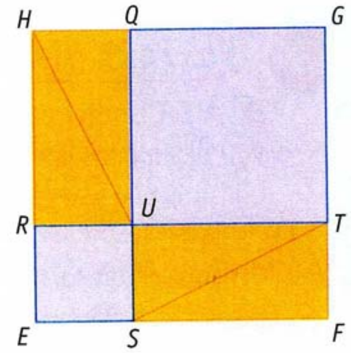
2) Justifier que le quadrilatère *MNOP* est un losange.

3) **a** Que dire des angles $\widehat{APM}$ et $\widehat{PMA}$?

b Démontrer que $\widehat{AMP} + \widehat{BMN} = 90°$.

c En déduire que le losange *MNOP* est un carré.

B : On a construit un carré *EFGH* de côté de longueur $a + b$.



1) Justifier que l'on peut coller quatre triangles orange à l'intérieur de ce carré, comme l'indique la figure ci-contre.

2) Préciser la nature des quadrilatères *RUSE* et *QGTU*.

C : Conclusion

1) Justifier que l'aire du carré *MNOP* est égale à la somme des aires des carrés *RUSE* et *QGTU*.

2) Écrire cette égalité en utilisant les données a, b et c.

3) Recopier et compléter la phrase suivante :

« *Dans un triangle …, le carré de la longueur de … est égal à … des carrés des longueurs des deux autres côtés.* »

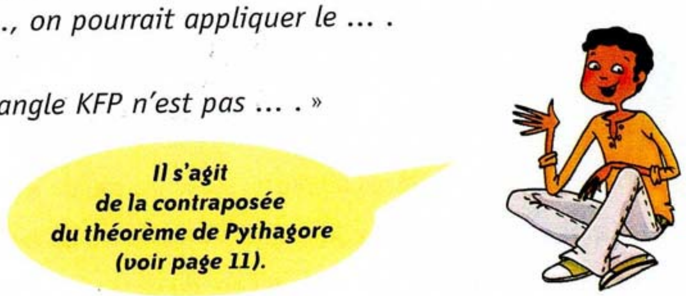
5 Je reconnais qu'un triangle n'est pas rectangle

1) Construire un triangle *KFP* tel que : $KF = 6{,}4$ cm, $KP = 7{,}8$ cm et $FP = 10{,}1$ cm.

2) Calculer $KF^2 + KP^2$, puis FP^2. Les résultats obtenus sont-ils égaux ?

3) Recopier et compléter les phrases suivantes :

« *Si le triangle KFP était rectangle en …, on pourrait appliquer le … .*
On aurait donc : …² + …² = …² .
Cette égalité n'étant pas vérifiée, le triangle KFP n'est pas … . »



6 J'étudie des triangles de dimensions données

A : Construction

1) Construire chacun des triangles suivants :

- le triangle *ABC* tel que $AB = 7$ cm, $AC = 6{,}5$ cm et $BC = 2{,}6$ cm ;
- le triangle *FGH* tel que $FG = 6{,}5$ cm, $FH = 6$ cm et $GH = 2{,}5$ cm ;
- le triangle *RST* tel que $RS = 6$ cm, $RT = 5{,}5$ cm et $ST = 2{,}4$ cm.

2) Pour chacun de ces triangles, faire une conjecture concernant sa nature.

B : Reconnaître un triangle non rectangle

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	k	m	n	k^2	$m^2 + n^2$
Dimensions du triangle *ABC*	7	6,5	2,6		
Dimensions du triangle *FGH*	6,5	6	2,5		
Dimensions du triangle *RST*	6	5,5	2,4		

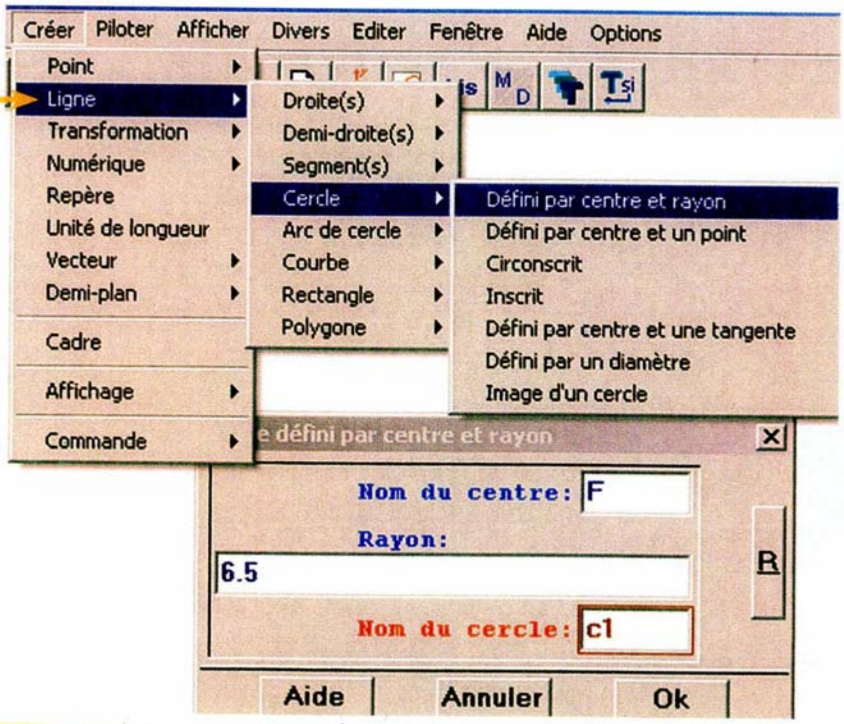
2) Parmi les triangles étudiés, lequel ou lesquels ne sont pas rectangles ? Justifier la réponse.

Ceci ne prouve pas que les autres sont rectangles.

C : Utiliser un logiciel de géométrie

1) Placer un point *F*.
Tracer le cercle C_1 de centre *F* et de rayon 6,5.
Placer un point *G* sur le cercle C_1.
Tracer le cercle C_2 de centre *F* et de rayon 6.
Tracer le cercle C_3 de centre *G* et de rayon 2,5.
Appeler *H* un des points d'intersection des cercles C_2 et C_3.

2) Tracer le triangle *FGH*.
Afficher la mesure de l'angle $\widehat{FHG}$.



3) Quelle semble être la nature du triangle *FGH* ?

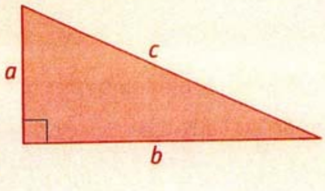
Une mesure, même réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie, ne constitue pas une preuve.

1 Théorème de Pythagore

a Énoncé

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

EXEMPLE :



Le triangle est rectangle.

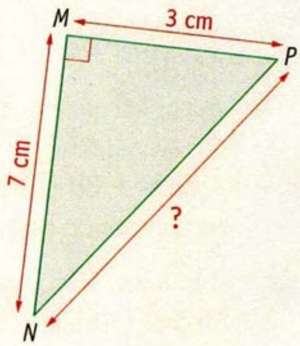
Donc : $c^2 = a^2 + b^2$.

b Utilisation du théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore sert à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle lorsque l'on connaît les deux autres longueurs.

EXEMPLE :

MNP est un triangle rectangle en M tel que $MN = 7$ cm et $MP = 3$ cm.
Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur NP.



Le triangle MNP est rectangle en M.
Or, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$NP^2 = MN^2 + MP^2$$
$$NP^2 = 7^2 + 3^2$$
$$NP^2 = 49 + 9$$
$$NP^2 = 58.$$

NP est une longueur, elle est donc positive.
On cherche donc le nombre positif qui, élevé au carré, donne 58.
Ce nombre s'appelle **la racine carrée de 58** et se note $\sqrt{58}$.
Donc : $\boldsymbol{NP = \sqrt{58}}$ **cm**.
On peut en obtenir une valeur approchée à l'aide de la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice (voir page 217).
$\boldsymbol{NP \approx 7{,}6}$ **cm**.
Une valeur approchée de NP au dixième près est 7,6 cm.

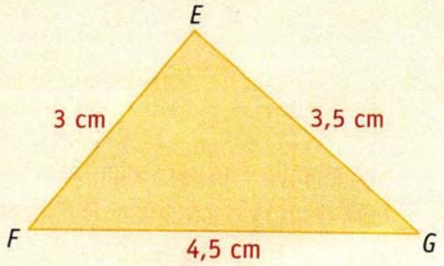
- Le théorème de Pythagore s'utilise pour un triangle rectangle.
- Le théorème de Pythagore permet de calculer une longueur.

2 Conséquence du théorème de Pythagore

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

EXEMPLE :

Soit un triangle EFG tel que : $EF = 3$ cm, $EG = 3{,}5$ cm et $FG = 4{,}5$ cm.
Le triangle EFG est-il rectangle ?



Dans le triangle EFG, le côté [FG] est le plus long.
On a $FG^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$
et $EF^2 + FG^2 = 3^2 + 3{,}5^2 = 9 + 12{,}25 = 21{,}25$.
On constate que : $\boldsymbol{FG^2 \neq EF^2 + EG^2}$.
Donc, d'après le théorème de Pythagore,
le triangle *EFG* n'est pas rectangle.

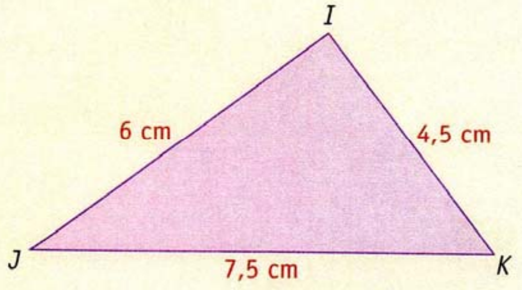
3 Réciproque du théorème de Pythagore

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle et a pour hypoténuse le plus grand côté.

Remarque : Cette propriété est admise.

EXEMPLE :

Soit un triangle IJK tel que : $IJ = 6$ cm, $IK = 4{,}5$ cm et $JK = 7{,}5$ cm.
Le triangle IJK est-il rectangle ?



Dans le triangle IJK, le côté [JK] est le plus long.
On a $JK^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$
et $IJ^2 + IK^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$.
On constate que : $\boldsymbol{JK^2 = IJ^2 + IK^2}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle *IJK* est rectangle en *I*.

- Le théorème de Pythagore permet aussi de prouver qu'un triangle dont on connaît les trois longueurs n'est pas rectangle.
- La réciproque du théorème de Pythagore permet de prouver qu'un triangle dont on connaît les trois longueurs est rectangle.

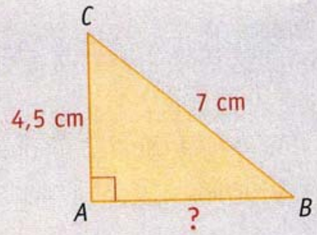
> Savoir-faire

1 J'APPRENDS À... Calculer la longueur du segment

Énoncé : ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AC = 4{,}5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad BC = 7 \text{ cm}.$$

Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur AB.



Solution :

Je connais deux longueurs du triangle rectangle ABC. Pour calculer la longueur du troisième côté, j'utilise le théorème de Pythagore.

Le triangle ABC est rectangle en A.

Or, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$7^2 = AB^2 + 4{,}5^2$$
$$49 = AB^2 + 20{,}25$$
$$AB^2 = 49 - 20{,}25.$$

Ainsi, $AB^2 = 28{,}75$.

AB est positif, donc $AB = \sqrt{28{,}75}$.

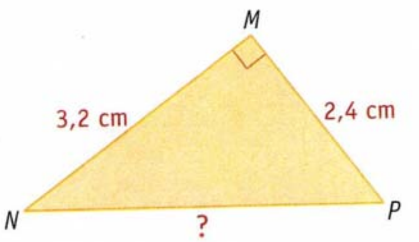
Donc, $AB \approx 5{,}4$ cm.

Le triangle est rectangle en A. Donc, l'hypoténuse est le côté [BC]. J'écris alors BC² = … .

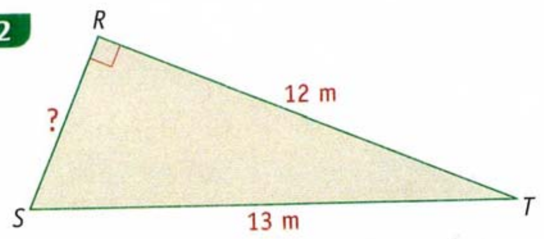
> J'APPLIQUE.

Pour les exercices 1 à 3, calculer la troisième longueur du triangle rectangle.

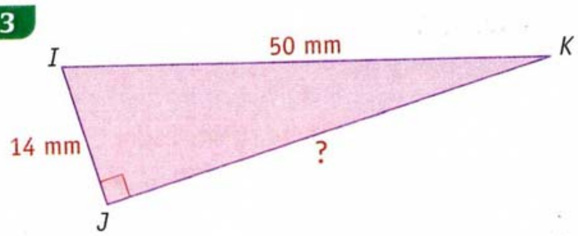
1



2

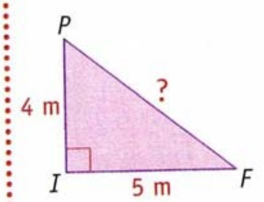


3

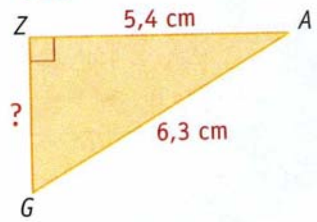


Pour les exercices 4 et 5, calculer une valeur approchée au dixième près de la troisième longueur du triangle rectangle.

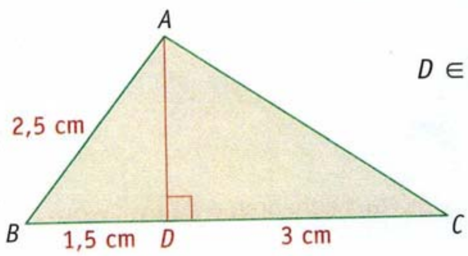
4



5



6



$D \in [BD]$

1) Calculer la longueur AD.

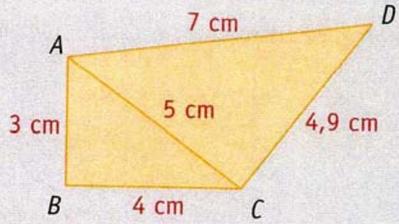
2) Calculer une valeur approchée au millimètre près de la longueur AC.

2 J'APPRENDS À... Déterminer si un angle est rectangle ou pas

Énoncé : $ABCD$ est un quadrilatère tel que :
$AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm,
$AD = 7$ cm et $CD = 4,9$ cm.

1) Le triangle ABC est-il rectangle ?

2) Le triangle ADC est-il rectangle ?



Solution :

Je calcule séparément le carré de la longueur du plus grand côté et la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, puis je les compare.

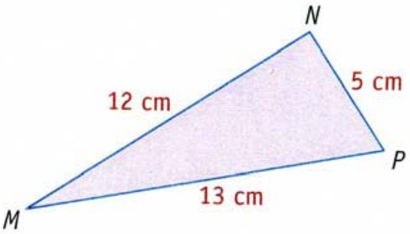
1) Dans le triangle ABC :
On a $AC^2 = 5^2 = 25$
et $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
On constate que : $\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ***ABC* est rectangle en *B***.

2) Dans le triangle ACD :
On a $AD^2 = 7^2 = 49$
et $AC^2 + CD^2 = 5^2 + 4,9^2 = 25 + 24,01$;
donc, $AC^2 + CD^2 = 49,01$.
On constate que : $\mathbf{AD^2 \neq AC^2 + CD^2}$.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle ***ACD* n'est pas rectangle**.

J'APPLIQUE.

Pour les exercices 7 et 8, démontrer que le triangle MNP est rectangle.

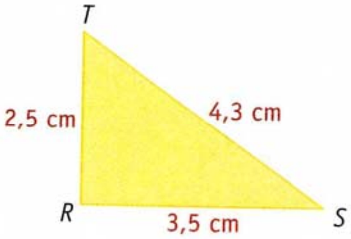
7



8 $NP = 7,5$ cm, $MP = 10$ cm et $MN = 12,5$ cm.

Pour les exercices 9 et 10, démontrer que le triangle RST n'est pas rectangle.

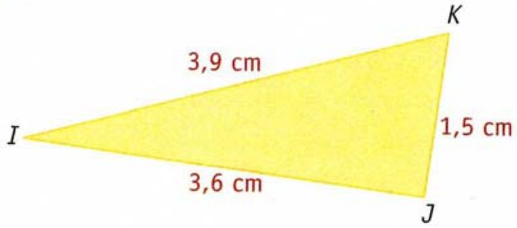
9



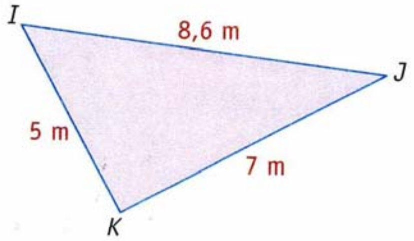
10 $RT = 6,6$ m, $RS = 10$ m et $ST = 7,5$ m.

Pour les exercices 11 à 14, déterminer si le triangle IJK est rectangle ou pas.

11



12

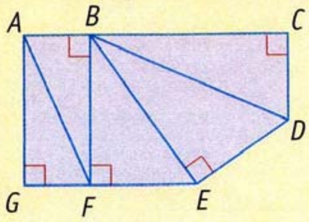


13 $IJ = 5,2$ cm, $IK = 2,1$ cm et $JK = 4,8$ cm.

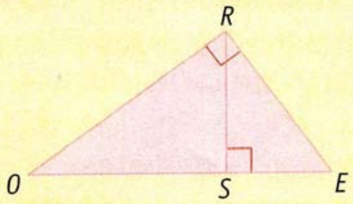
14 $IJ = 9$ dm, $IK = 41$ dm et $JK = 40$ dm.

À L'ORAL !

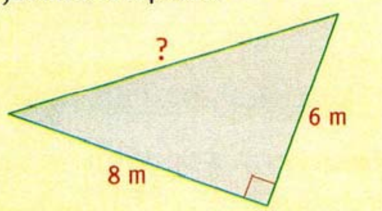
15 Nommer tous les triangles rectangles de la figure. Préciser dans chaque cas leur hypoténuse.



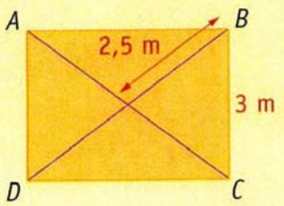
16 Énoncer le théorème de Pythagore pour chaque triangle rectangle de la figure ci-dessous.



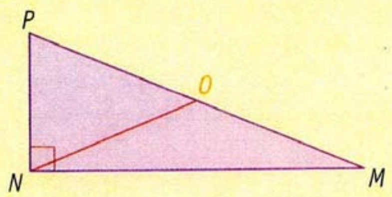
17 Calculer la longueur du troisième côté du triangle en justifiant la réponse.



18 Calculer la longueur du rectangle $ABCD$.
Justifier la réponse.



19 Le triangle MNP est rectangle en N.
Le point O est le milieu du segment $[MP]$.
On a : $ON = 6{,}5$ cm et $MN = 12$ cm.
Calculer la longueur NP.



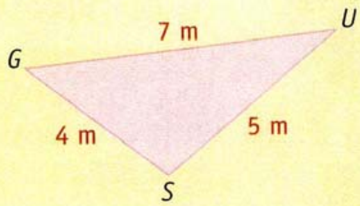
Pour les exercices 20 à 22, on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle. Trouver la bonne propriété pour répondre à cette consigne.

20 L'énoncé dit :
« *Démontrer que ce triangle est rectangle* ».

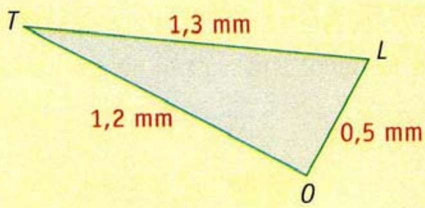
21 L'énoncé dit :
« *Démontrer que ce triangle n'est pas rectangle* ».

22 L'énoncé dit :
« *Ce triangle est-il rectangle ?* ».

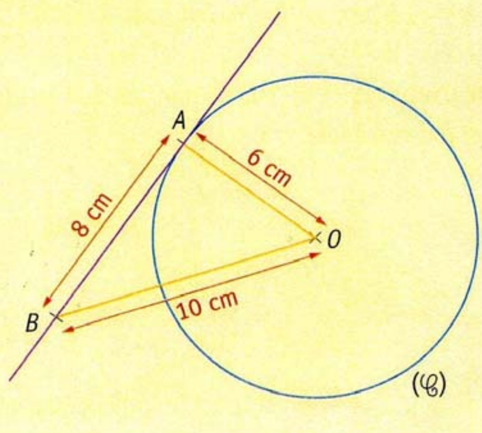
23 Le triangle GUS est-il rectangle ?
Justifier la réponse.



24 Le triangle LOT est-il rectangle ?
Justifier la réponse.



25 La droite (AB) est-elle tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A ?
Jusitifer la réponse.



Théorème de Pythagore

26 Encadrer chacun des nombres par deux entiers consécutifs :

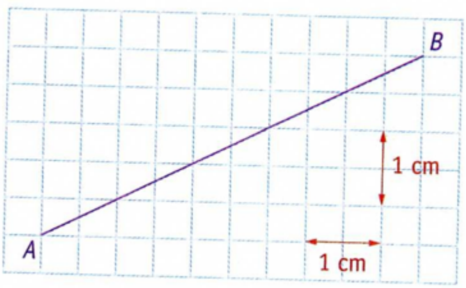
a $\sqrt{20}$; **b** $\sqrt{52}$; **c** $\sqrt{125}$; **d** $\sqrt{0,7}$.

27 Utiliser la calculatrice pour déterminer $\sqrt{361}$ et $\sqrt{569}$. Préciser si on obtient une valeur exacte ou une valeur approchée.

28 Le triangle *MUR* est rectangle en *U*. Calculer dans chaque cas la longueur manquante.

	MU	*MR*	*UR*
1	24		18
2		10,25	2,25
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	

29 **1)** Reproduire la figure ci-dessous sur du papier quadrillé :



2) Calculer la longueur *AB* ; on donnera une valeur approchée au millimètre près.

30 Construire un rectangle *ABCD* tel que :

$AB = 60$ mm et $BC = 25$ mm.

Calculer la longueur de la diagonale [*AC*].

31 *EFGH* est un rectangle tel que :

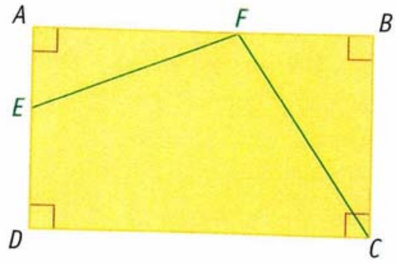
$EF = 6$ cm et $FH = 6,5$ cm.

Calculer la longueur *FG*.

32 *ABCD* est un rectangle tel que :

$AD = 5$ cm, $E \in [AD]$ et $F \in [AB]$.

On donne :
$AE = 2$ cm,
$AF = 5$ cm
et $FC = 6$ cm.



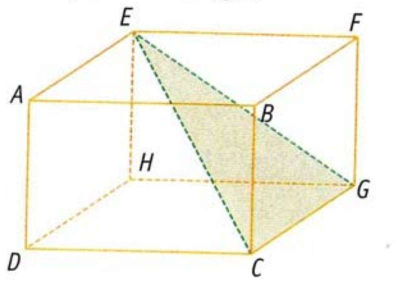
1) Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur *EF*.

2) Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur *AB*.

33 **D'après Brevet 2005**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

$AE = 3$ m ;
$AD = 4$ m ;
$AB = 6$ m.



1) **a** Que peut-on dire des droites (*AE*) et (*AB*) ? Le justifier.

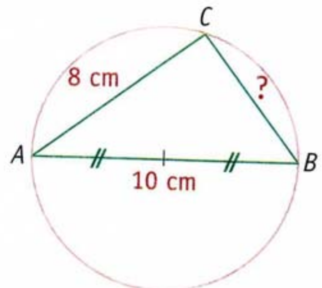
b Les droites (*EH*) et (*AB*) sont-elles sécantes ?

2) **a** Calculer *EG*. On donnera une valeur approchée au dixième près.

b En considérant le triangle rectangle *EGC*, calculer la valeur approchée au dixième près de la longueur de la diagonale [*EC*].

34 Le point *C* appartient au cercle de diamètre [*AB*].

On donne :
$AB = 10$ cm
et $AC = 8$ cm.



1) Reproduire la figure en vraie grandeur.

2) Prouver que le triangle *ABC* est rectangle.

3) Calculer la longueur *BC*.

4) Vérifier la cohérence du résultat en mesurant sur la figure.

Conséquence du théorème de Pythagore

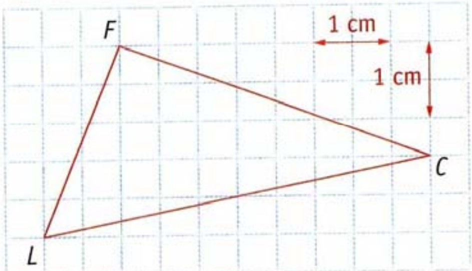
35 $MNPO$ est un parallélogramme tel que :

$MN = 6$ cm, $MO = 5$ cm et $ON = 7$ cm.

Démontrer que le parallélogramme $MNPO$ n'est pas un rectangle.

Je m'intéresse au triangle MNO.

36 **1)** Reproduire la figure sur du papier quadrillé.



2) Calculer FL^2, FC^2 et CL^2.

Pour calculer FL^2, j'ai tracé un triangle rectangle d'hypoténuse [FL].

3) Démontrer que le triangle FCL n'est pas rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore

37 RAP est un triangle tel que :

$RA = 30$ mm, $AP = 16$ mm et $RP = 34$ mm.

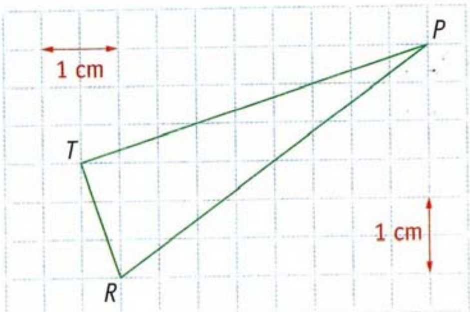
1) Démontrer que ce triangle est rectangle.

2) En déduire le rayon de son cercle circonscrit.

38 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que : $AB = 7{,}5$ cm, $AC = 9$ cm et $BD = 12$ cm.

Démontrer que le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

39 Démontrer que le triangle TPR est rectangle.

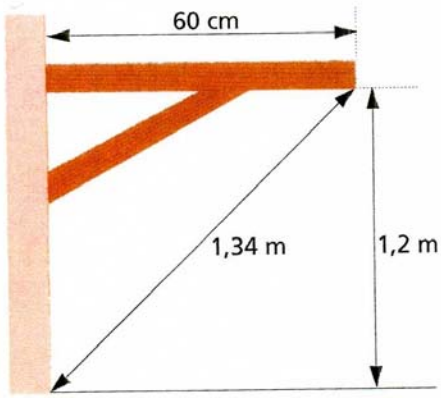


Théorème ou réciproque

40 Déterminer dans chaque cas si le triangle MNP est rectangle ou pas. Justifier chaque réponse.

	MN	MP	NP
①	15	17	8
②	4,1	5,2	3,2
③	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
④	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$

41

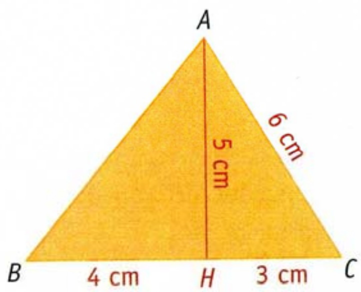


Paul a posé une étagère. Pour savoir si elle est perpendiculaire au mur, il a pris les trois mesures indiquées sur le dessin.

1) L'étagère est-elle perpendiculaire au mur ?

2) Paul doit-il recommencer la pose de son étagère ?

42



La droite (AH) est-elle une hauteur du triangle ABC ? Justifier la réponse.

43 Une échelle longue de 3,5 m est posée contre un mur. Elle atteint une hauteur de 3 m.

Son pied est éloigné de 1,7 m de la base du mur.

Ce mur est-il perpendiculaire au sol ?

44 $OGFA$ est un rectangle tel que :

$OF = AG = 5$ cm et $GF = 3{,}5$ cm.

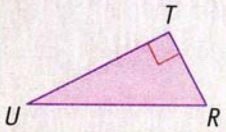
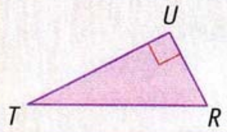
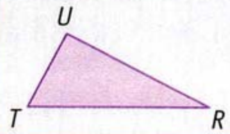
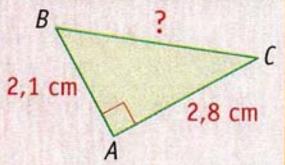
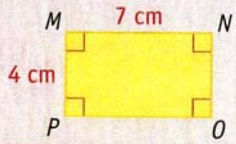
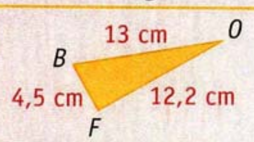
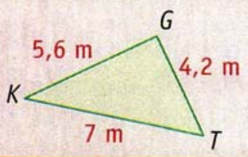
Ce rectangle est-il un carré ?

>> Mon bilan

J'ai appris à...

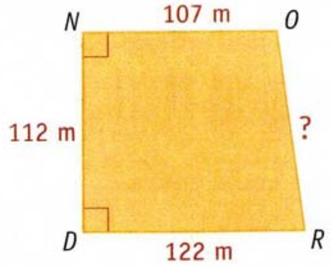
- Calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle.
- Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.
- Démontrer qu'un triangle est rectangle.

Attention ! Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

	A	B	C	Si échec, revoir :
45 L'égalité $RT^2 = RU^2 + TU^2$ correspond au triangle :				P. 206
46 Le triangle BOL est rectangle en O. Donc :	$BL^2 = BO^2 + OL^2$	$OL^2 = BL^2 + OB^2$	$LB^2 = LO^2 + OB^2$	P. 206
47 	$BC = 4{,}9$ cm	$BC = 3{,}5$ cm	$BC = 0{,}7$ cm	P. 208
48 MNP est un triangle rectangle en P. $MN = 13$ m et $NP = 5$ m ; donc :	$MP \approx 13{,}92$ m	$MP = 12$ m	$MP = 144$ m	P. 208
49 	$MO = 65$ cm²	$MO = 8{,}06$ cm	$MO \approx 8{,}06$ cm	P. 208
50 Si $KL^2 + LP^2 = KP^2$, alors le triangle KLP est :	rectangle en P	rectangle en K	rectangle en L	P. 207
51 	Le triangle BOF n'est pas rectangle	Le triangle BOF est rectangle en F	Le triangle BOF est rectangle en B	P. 209
52 	Le triangle KGT n'est pas rectangle	Le triangle KGT est rectangle en T	Le triangle KGT est rectangle en G	P. 209
53 VPS est un triangle tel que : $VP = 8{,}4$ cm, $VS = 9{,}1$ cm et $PS = 3{,}5$ cm.	Le triangle VPS n'est pas rectangle	Le triangle VPS est rectangle en P	Le triangle VPS est rectangle en V	P. 209
54 HOP est un triangle tel que : $OH = 4$ cm, $OP = 5{,}2$ cm et $HP = 6{,}5$ cm.	Le triangle HOP n'est pas rectangle	Le triangle HOP est rectangle en P	Le triangle HOP est rectangle en O	P. 209

Solutions p. 296

55 Le quadrilatère $NORD$ est un trapèze rectangle.



On connaît les longueurs de trois de ses côtés.
Calculer la longueur du quatrième côté $[OR]$.

56 RST est un triangle rectangle en R tel que :
$RS = 2{,}1$ cm et $RT = 7{,}2$ cm.
On appelle I le milieu du segment $[ST]$.
Calculer la longueur RI.

57 $MNPO$ est un losange tel que :
$MP = 2{,}2$ cm et $NO = 12$ cm.
Calculer le périmètre de ce losange.

58 $RSTU$ est un losange tel que : $RS = 25$ mm.
La diagonale $[RT]$ mesure 48 mm.
Calculer la longueur de l'autre diagonale.

59 Joaquim achète un ordinateur portable ayant un écran de diagonale 17'' (dix-sept pouces).
Il remarque que la largeur de l'écran est la moitié de sa diagonale.

© Apple France

Déterminer une valeur approchée, au dixième de pouce près, de la longueur de cet écran.

60 Sur une tablette d'argile assyrienne datant du VIIe siècle avant J.-C., on peut traduire :
« *Un bâton long de 30 unités est appuyé contre un mur. En hauteur, il glisse de 6 unités.*
De combien le pied du bâton s'éloigne-t-il de la base du mur ? »
On suppose que le bâton était initialement le long du mur.
1) Que faut-il supposer de plus pour pouvoir répondre à ce problème ?
2) Résoudre cette énigme.

J'ai fait un schéma.

61 **1)** $KARE$ est un carré de côté 4 cm.
Calculer la valeur approchée au dixième près de la longueur des diagonales de ce carré.
2) Une diagonale d'un carré $ROND$ mesure 6 cm.
Calculer une valeur approchée au centième près de la longueur d'un côté de ce carré.

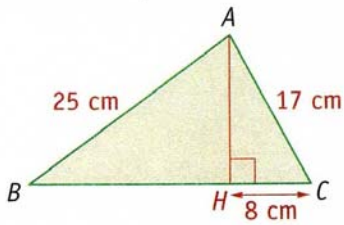
62 ABC est un triangle isocèle en A tel que :
$AB = 35$ mm et $BC = 42$ mm.
On appelle H le milieu du segment $[BC]$.
1) Démontrer que le triangle ABH est rectangle.
2) Calculer la longueur AH.

63 MNP est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
On appelle I le milieu du segment $[NP]$.
Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur MI.

64 La longueur d'un rectangle est 28 cm ; une de ses diagonales mesure 28,7 cm.
Calculer l'aire de ce rectangle.

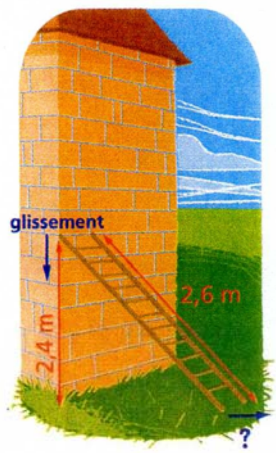
65 Une des deux diagonales d'un losange mesure 10 cm. Les côtés de ce losange mesurent 7 cm chacun.
Calculer l'aire du losange au centimètre carré près.

66 Dans le triangle ABC, on appelle H le pied de la hauteur issue de A.
On donne : $AB = 25$ cm, $AC = 17$ cm et $CH = 8$ cm.



Calculer l'aire du triangle ABC.

67 Une échelle est appuyée contre un mur perpendiculaire au sol. Elle mesure 2,6 m et atteint une hauteur de 2,4 m. En hauteur, elle glisse de 20 cm.
De quelle distance va-t-elle glisser horizontalement ?

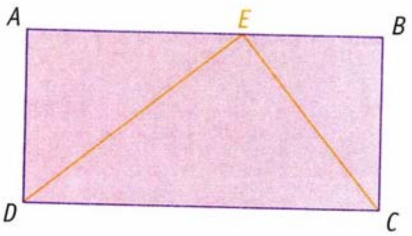


68 Un téléviseur a pour format 16/9 lorsque le quotient de la longueur de son écran par sa largeur est $\frac{16}{9}$.
Déterminer la longueur de sa diagonale lorsqu'il a pour longueur d'écran 64 cm ; on donnera une valeur approchée au millimètre près.

69 **1)** **a** Construire un triangle CAV tel que :
$CA = 25$ mm, $AV = 60$ mm et $CV = 65$ mm.
b Le triangle CAV est-il rectangle ?
2) **a** Placer un point E tel que :
$CE = 39$ mm et $VE = 52$ mm.
b Démontrer que les quatre points C, A, V et E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

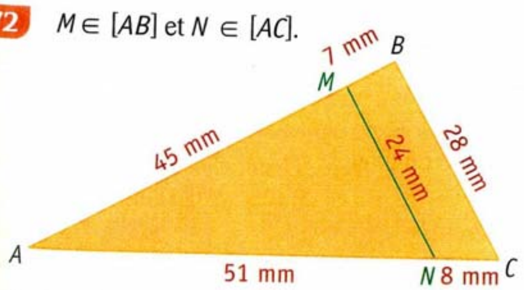
70 **1)** Construire un triangle ACH tel que :
$AC = 6{,}4$ cm, $AH = 5{,}4$ cm et $HC = 3{,}5$ cm.
Construire le point B symétrique du point C par rapport au point H.
2) Quelle semble être la nature du triangle ABC ?
3) Prouver que le triangle ABC n'est pas isocèle en A.

71 $ABCD$ est un rectangle tel que :
$AB = 8{,}2$ cm et $AD = 4$ cm.
On place un point E sur le segment [AB] tel que : $AE = 5$ cm.



1) Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur ED.
2) Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur EC.
3) Le triangle ECD est-il rectangle ?

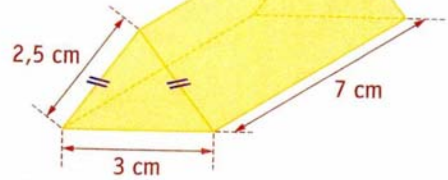
72 $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$.



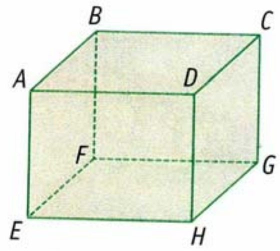
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

73 **1)** Construire un triangle ABC tel que :
$AB = 6$ cm, $BC = 2{,}5$ cm et $AC = 6{,}5$ cm.
Construire un point D tel que :
$BD = 4{,}5$ cm et $AD = 7{,}5$ cm.
Combien y a-t-il de points D possibles ?
2) Démontrer que, dans tous les cas, les points B, C et D sont alignés.
3) Calculer l'aire du triangle ACD dans chaque cas.

74 Calculer le volume de ce prisme droit :

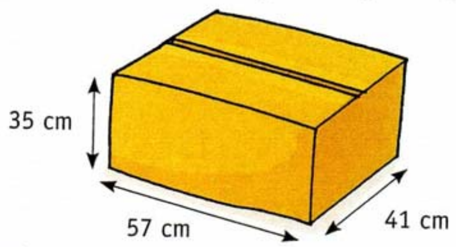


75 On considère le prisme droit ci-dessous :
Une de ses bases est le parallélogramme $ABCD$.
On a : $AB = 3{,}6$ cm,
$EH = 4{,}8$ cm,
$CG = 3{,}8$ cm,
$AC = 6$ cm.

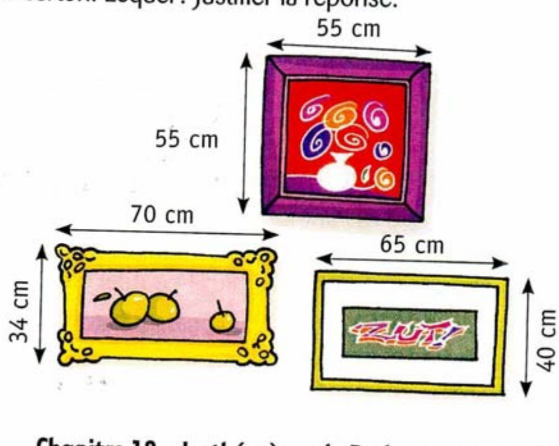


S'agit-il d'un parallélépipède rectangle ?

76 Un carton de déménagement a pour dimensions :



Un seul des trois tableaux suivants ne peut pas tenir dans ce carton. Lequel ? Justifier la réponse.



DEVOIR À LA MAISON

77 Tracer un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 5 cm. On appelle $[AB]$ un diamètre de ce cercle.

1) D est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $AD = 7$ cm. Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur BD.

2) Construire un point E tel que :

$AE = 8$ cm et $BE = 6$ cm.

Démontrer que le point E appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

78 Calculer l'aire d'un carré dont une diagonale mesure huit mètres.

79 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que :
- $AB = 7$ cm, $AE = 5$ cm et $FG = 6$ cm ;
- $M \in [AE]$ et $AM = 3$ cm ;
- $N \in [FE]$ et $NF = 3$ cm.

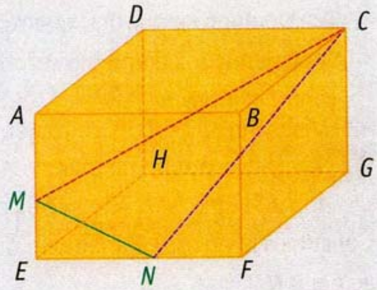
1) Calculer MN^2.

2) **a** Calculer AC^2.

b En considérant le triangle rectangle AMC, calculer MC^2.

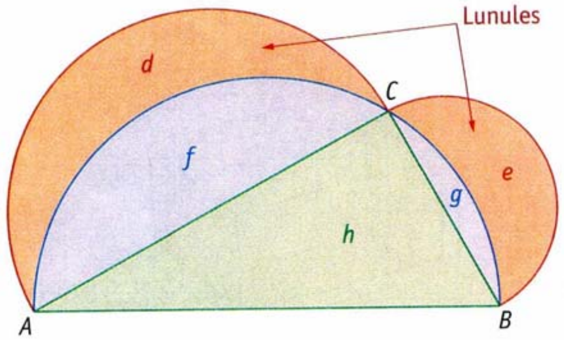
3) Calculer NG^2, puis NC^2.

4) Le triangle MNC est-il rectangle ?



JE CHERCHE...

80 Les lunules d'Hippocrate de Chio (400 ans avant J.-C.)



1) **a** Construire un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Placer un point C sur ce demi-cercle. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

b Construire les demi-cercles rouges ayant pour diamètres respectifs $[AC]$ et $[BC]$. Colorier la figure comme ci-dessus.

On note d, e, f, g et h les aires de chacune des parties coloriées.

2) Démontrer que : $(d + f) + (e + g) = f + g + h$.

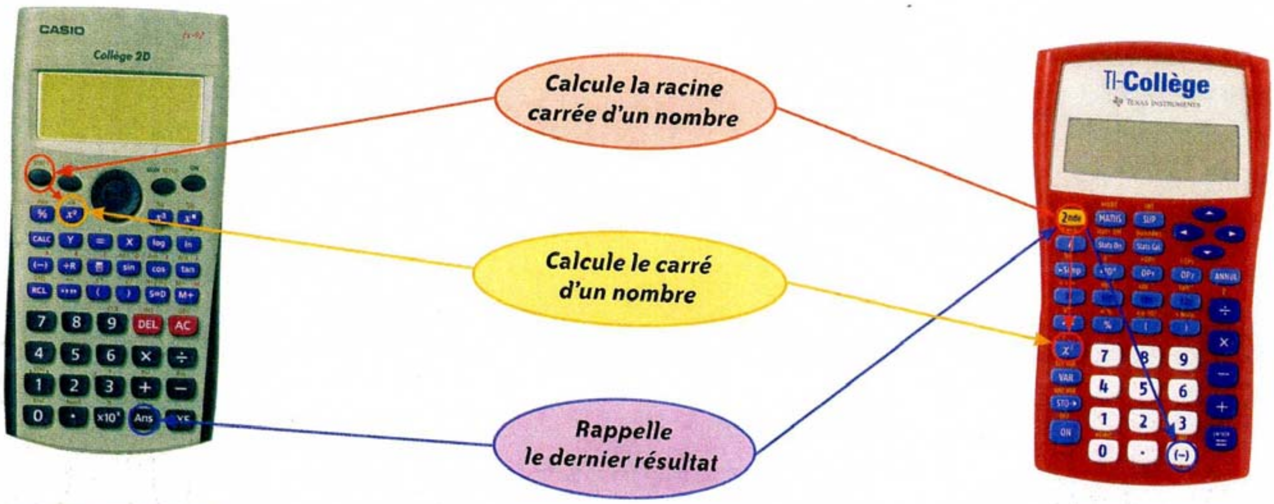
3) En déduire que la somme des aires des lunules rouges est égale à l'aire du triangle vert.

Hippocrate de Chio est né vers 450 av. J.-C. Durant un séjour à Athènes, il rencontre des philosophes et des mathématiciens et il s'intéresse aux mathématiques. Il est le premier à calculer une aire délimitée par des courbes.

81 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. La perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A coupe la droite (BC) au point H. Calculer la longueur BH.

>> J'utilise la calculatrice

Les calculatrices « collège » permettent de calculer la racine carrée d'un nombre.



Casio Collège 2D

EXEMPLE : **Calculer $\sqrt{39}$. Donner une valeur approchée au centième près.**

Sélectionner le format **Line** (voir page 00).

Pour calculer $\sqrt{39}$, taper la séquence :

SHIFT | x^2 | 3 | 9 | EXE

On obtient :

$\sqrt{}$(39
6.244997998

Donc : $\sqrt{39} \approx 6{,}25$.

TI Collège

Pour calculer $\sqrt{39}$, taper la séquence :

2nde | x^2 | 3 | 9 | ENTRER =

On obtient :

$\sqrt{}$(39
6.244997998

Donc : $\sqrt{39} \approx 6{,}25$.

EXEMPLE : ***ABC* est un triangle rectangle en *A* tel que : $AB = 13{,}5$ cm et $AC = 60$ cm.**
D'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 13{,}5^2 + 60^2$. Calculer *BC*.

Casio Collège 2D

Taper la séquence :

1 | 3 | . | 5 | x^2 | + | 6 | 0 | x^2 | EXE

On obtient :

13.5²+60²
3782.25

Pour calculer $\sqrt{3782{,}25}$, taper la séquence :

SHIFT | x^2 | Ans | EXE

On obtient :

$\sqrt{}$(Ans
61.5

Donc : $BC = 61{,}5$ cm.

TI Collège

Taper la séquence :

1 | 3 | . | 5 | x^2 | + | 6 | 0 | x^2 | ENTRER =

On obtient :

13.5²+60²
3782.25

Pour calculer $\sqrt{3782{,}25}$, taper la séquence :

2nde | x^2 | 2nde | (–) | ENTRER =

On obtient :

$\sqrt{}$(Rep
61.5

Donc : $BC = 61{,}5$ cm.

82 Le triangle *MNP* est rectangle en *M*.
Recopier et compléter le tableau ci-contre.
On donnera soit une valeur exacte, soit une valeur approchée au centième près.

MN	*MP*	*NP*
13	84	
25		34
	3,2	4
1,25		9,75