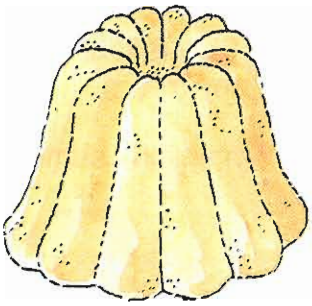
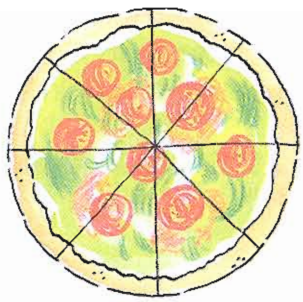
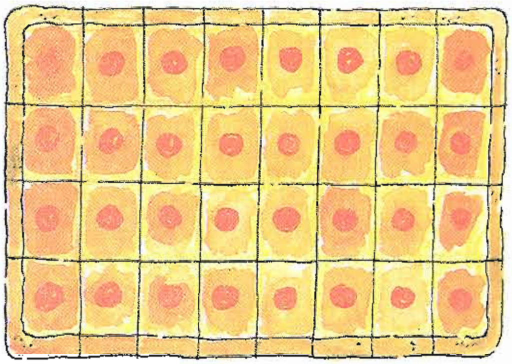
8. Se zlomky se také počítá

8.1. Zlomky se znovu představují





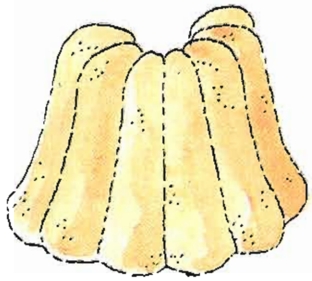


Úloha 1

Kryšpín snědl k snídani tři kousky a Betka dva kousky bábovky.

a) Jakou část bábovky snědl každý z nich?

b) Jaká část bábovky zůstala k odpolední svačině?



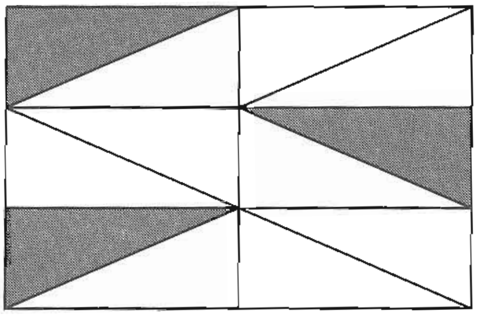
Úloha 2

Petr a Honza měli za sebou už dvě třetiny plánované cesty, když dorazili k rozhledně. Kolik kilometrů pochodu mají ještě před sebou, jestliže zatím ušli 24 kilometrů?

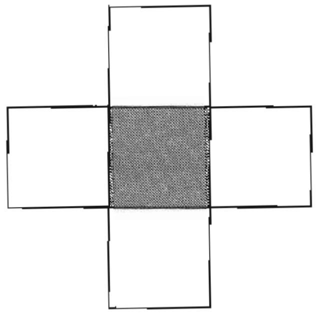
■ Úloha 3

Jaké části obrazců na obrázku jsou vybarveny šedě?

a)



b)



■ Úloha 4

a) Kolik minut je $\frac{3}{4}$ h, $\frac{3}{6}$ h, $\frac{5}{12}$ h, $\frac{4}{5}$ h, $\frac{4}{30}$ h?

b) Kolik mililitrů je $\frac{3}{4}$ l, $\frac{2}{5}$ l, $\frac{1}{4}$ l, $\frac{3}{8}$ l, $\frac{2}{10}$ l?

c) Kolik gramů je $\frac{2}{5}$ kg, $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{2}{10}$ kg, $\frac{5}{8}$ kg, $\frac{35}{100}$ kg?

■ Úloha 5

a) Kolik hodin je 45 min, 120 min, 18 min, 24 min, 48 min ?
b) Kolik litrů je 250 ml, 300 ml, 125 ml, 450 ml, 875 ml ?
c) Kolik kilometrů je 700 m, 250 m, 125 m, 355 m, 625 m ?

■ Úloha 6

Dana a Jitka si zaznamenávaly do tabulky, kolik korun si vydělaly za sběr jahod.

7.7.	72 Kč	9 košů
9.7.	90 Kč	15 košů
13.7.	144 Kč	24 košů
14.7.	60 Kč	10 košů
15.7.	168 Kč	26 košů
16.7.	48 Kč	8 košů
17.7.	138 Kč	23 košů
Celkem	720 Kč	115 košů

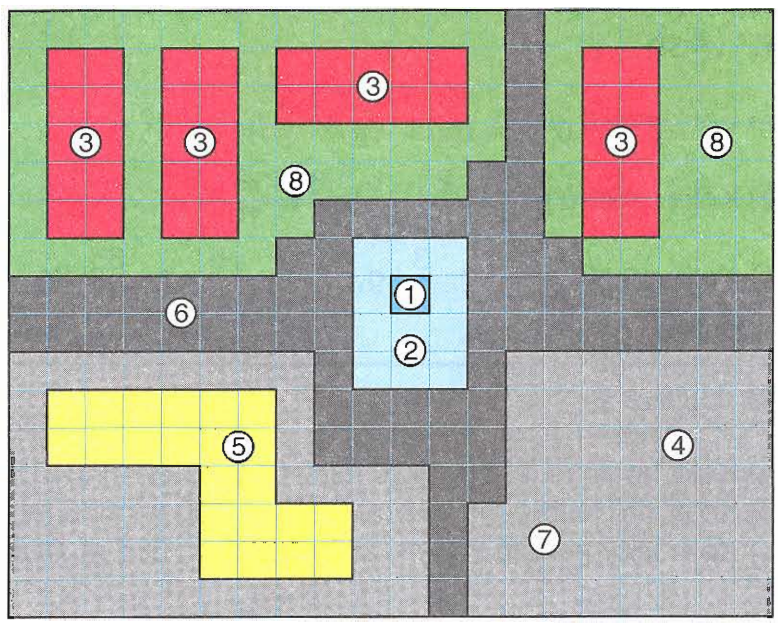
a) Který den nasbíraly dívky nejvíce a který den nejméně košíků jahod ?
b) Který den si dívky vydělaly nejvíce a který den nejméně?
Jaké části z celkem vydělaných peněz to byly ?
c) Popište závislost počtu vydělaných pěněz na počtu nasbíraných košíků.

8.2. Zlomek jako část celku

● Příklad 1

Betka a její spolužáci zjišťovali, kolik „zelených ploch" je v blízkosti jejich školy. Přitom mimo jiné zakreslili na čtverečkový papír i plánek místního náměstí a připravili tabulku

1 vodotrysk
2 vodní nádrž
3 květinové záhony
4 parkoviště
5 prodejní stánky
6 asfaltové chodníky
7 kamenné dláždění
8 trávník



Část náměstí	Počet čtverečků na plánku	Z celého náměstí je to část
Asfaltové chodníky		
Kamenné dláždění		
Trávník		
Květinové záhony		
Vodní nádrž s vodotryskem		
Celé náměstí		

a) Přepište tabulku do sešitu a doplňte ji.
b) Z údajů uvedených v tabulce určete tu část náměstí, která podle Betčiných záznamů zaujímá nejmenší (největší) část náměstí.
c) Vypočtěte, jaká část celého náměstí je vyhrazena pro
• parkoviště,
• prodejní stánky.
d) Jakou část náměstí zaujímají „zelené plochy"? Je to alespoň polovina obsahu celého náměstí?
e) Pomocí vhodného diagramu znázorněte rozdělení náměstí na jednotlivé části.

Betka znázornila na plánku náměstí jako obdélník, který má obsah 320 čtverečků.

Jeden čtvereček znázorňuje tedy na plánku jednu třistadvacetinu ($\frac{1}{320}$) obsahu celého náměstí.

a)

Část náměstí	Počet čtverečků na plánku	Z celého náměstí je to část
Asfaltové chodníky	68	$\frac{68}{320}$
Kamenné dláždění	120	$\frac{120}{320}$
Trávník	80	$\frac{80}{320}$
Květinové záhony	40	$\frac{40}{320}$
Vodní nádrž s vodotryskem	12	$\frac{12}{320}$
Celé náměstí	320	$\frac{320}{320}$

b) Z tabulky zjistíme (pokud nebudeme uvažovat každý květinový záhon samostatně):
- vodní nádrž s vodotryskem zaujímá nejmenší část náměstí,
- kamenné dláždění zaujímá největší část náměstí.

c) Z Betčina plánku zjistíme:
- pro parkoviště byla vyhrazena část náměstí, která má na plánku obsah 52 čtverečků, tj. $\frac{52}{320}$ obsahu celého náměstí,
- pro prodejní stánky byla vyhrazena část náměstí, která má na plánku obsah 24 čtverečků, tj. $\frac{24}{320}$ obsahu celého náměstí.

d) Na Betčině plánku zaujímají „zelené plochy“:

trávník	80 čtverečků,
květinové záhony	40 čtverečků,
dohromady	120 čtverečků.

Z obsahu celého náměstí zaujímají tedy „zelené plochy“ celkem část $\frac{120}{320}$. Tento zlomek se pokusíme ještě upravit:

na plánku je obsah	celého náměstí	320 čtverečků,
	poloviny náměstí	160 čtverečků,
	čtvrtiny náměstí	80 čtverečků,
	osminy náměstí	40 čtverečků.

Obsah 120 čtverečků můžeme potom vyjádřit např. takto:

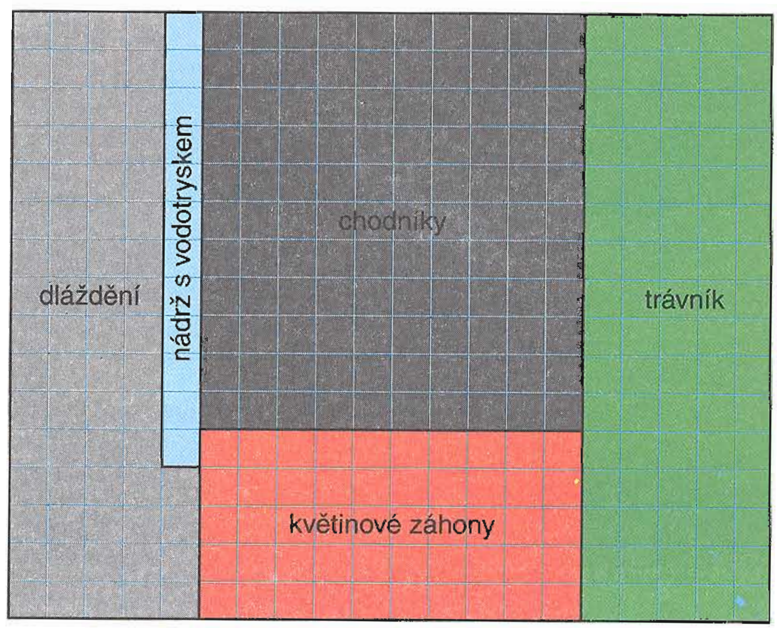
120 čtverečků = 80 čtverečků + 40 čtverečků,

proto je obsah 120 čtverečků roven $(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ obsahu celého náměstí. Protože ale $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, můžeme dále psát

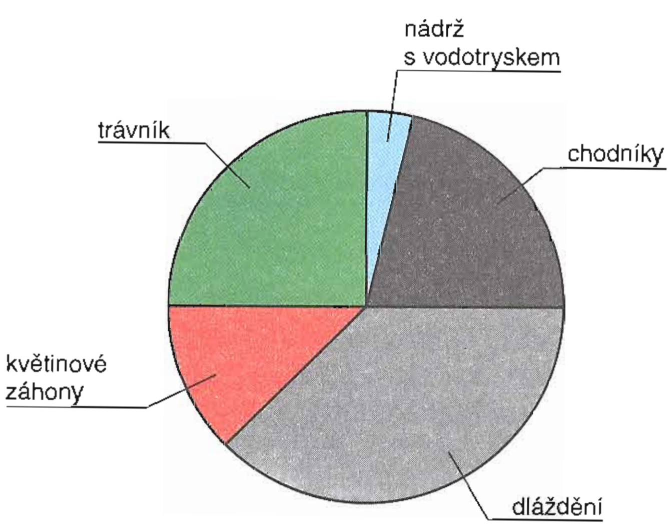
$$\frac{120}{320} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

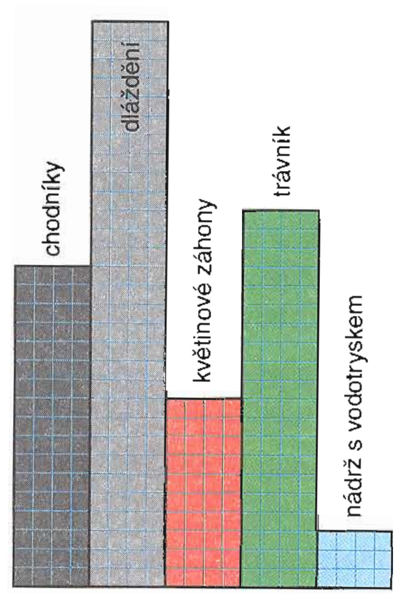
„Zelené plochy" zaujímají $\frac{3}{8}$ obsahu celého náměstí, tedy méně než jednu polovinu obsahu celého náměstí.

e) Rozdělení náměstí na jednotlivé části je už znázorněno na původním Betčině plánku, avšak je např. pro porovnávání obsahů jednotlivých částí nepřehledné.
Sestrojíme proto diagram, který má stejný tvar jako obrázek náměstí na plánku, ale uspořádáme ho přehledněji:



Ani z tohoto obrázku nemůžeme ještě rychle zjišťovat potřebné údaje, proto sestrojíme kruhový a sloupcový diagram (stranu jednoho čtverečku jsme zmenšili na polovinu):





Úloha 1

Navrhněte takové úpravy náměstí, aby se jeho „zelená plocha“ zvětšila alespoň na polovinu.

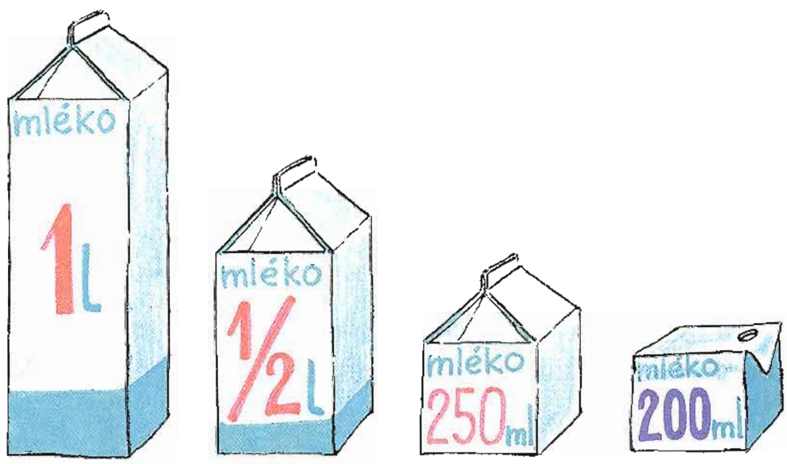
8.3. Krátíme a rozšiřujeme zlomky

Úloha 1

V mlékárně prodávají mléko v balení 1 l, 0,5 l, 250 ml a 200 ml.

a) Zapište všechny možnosti, jak můžeme nakoupit jeden litr (tři čtvrtě litru, půl litru, čtvrt litru) mléka.

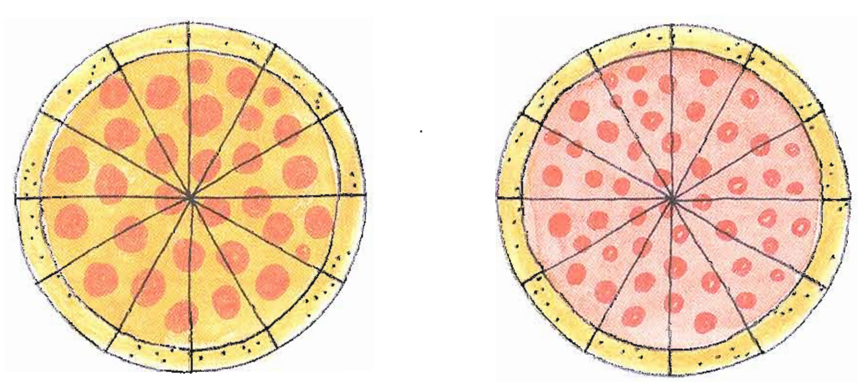
b) Na obrázku jsou nakresleny krabice s mlékem, které jsme přinesli z nákupu. Jaké množství mléka jsme zakoupili?



Příklad 1

Kryšpín s Betkou jeli s kamarády na výlet a paní Ajnštajnová pro ně upekla dva stejně velké ovocné koláče, meruňkový pro děvčata a třešňový pro chlapce, a oba rozdělila na stejně velké díly.

a) Děvčata snědla tři čtvrtiny meruňkového koláče a chlapci dvě třetiny třešňového koláče. Kdo snědl větší část koláče, chlapci nebo děvčata?



b) Kolik zbylo kousků třešňového a kolik meruňkového koláče? Kolik dětí nejméně a kolik nejvíce jelo na výlet, jestliže každý z účastníků snědl alespoň jeden kousek koláče?

Paní Ajnštajnová rozdělila (viz obrázek) každý koláč na dvanáct stejně velkých dílů.

a)

Chlapci snědli dvě třetiny třešňového koláče, tedy 8 kousků z 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

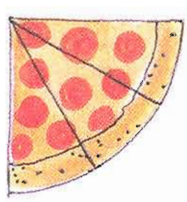
Děvčata snědla tři čtvrtiny meruňkového koláče, tedy 9 kousků z 12 .

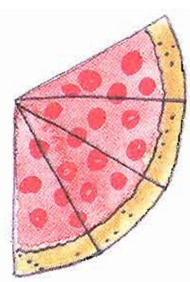
$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Oba koláče byly rozděleny na stejný počet stejně velkých částí, děvčata jich snědla více, proto děvčata snědla větší část koláče než chlapci. Je tedy

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}.$$

b) Zbyly tři kousky meruňkového a čtyři kousky třešňového koláče.





Na výlet jely nejméně čtyři děti (jestliže předpokládáme, že s Betkou a s Kryšpínem jel vždy alespoň jeden jejich kamarád) a nejvíce sedmnáct dětí (jestliže každý z účastníků výletu snědl právě jeden kousek koláče).

Úloha 2

Doplňte po přepsání do sešitu následující tabulky a porovnejte doplněné hodnoty.

a)

Ze 150 kg je					
$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{30}{50}$
90 kg					

b)

Ze 360 minut je					
$\frac{15}{90}$	$\frac{12}{72}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{6}$
60 min					

Násobíme-li čitatele i jmenovatele zlomku týmž nenulovým číslem, dostaneme zlomek, který je mu roven.

Říkáme, že ***zlomek rozšiřujeme***.

Např. násobíme-li čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{3}{5}$ číslem 4, dostaneme zlomek, který je mu roven:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\,.\,4}{5\,.\,4}=\frac{12}{20}$$

a říkáme, že jsme zlomek $\frac{3}{5}$ ***rozšířili číslem*** 4.

Dělíme-li čitatele i jmenovatele zlomku týmž nenulovým číslem, dostaneme zlomek, který je mu roven.

Říkáme, že ***zlomek krátíme***.

Např. dělíme-li čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{5}{30}$ číslem 5, dostaneme zlomek, který je mu roven:

$$\frac{5}{30}=\frac{5:5}{30:5}=\frac{1}{6}$$

a říkáme, že jsme zlomek $\frac{5}{30}$ ***krátili číslem*** 5.

● Cvičení

801. Rozšiřujte zlomky daným číslem:

a) $\frac{2}{3}, \frac{11}{8}, \frac{7}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{10}$ (číslem 4),

b) $\frac{1}{8}, \frac{4}{5}, \frac{9}{12}, \frac{6}{2}, \frac{1}{10}$ (číslem 5),

c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{6}{12}, \frac{6}{17}, \frac{9}{2}$ (číslem 7),

d) $\frac{1}{9}, \frac{2}{15}, \frac{6}{3}, \frac{2}{12}, \frac{6}{7}$ (číslem 9),

e) $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{9}{4}, \frac{2}{5}, \frac{6}{9}$ (číslem 1).

802. Rozšiřujte zlomky tak, abyste doplnili chybějící čísla.

a) $\frac{2}{3}=\frac{}{9}$, $\frac{7}{6}=\frac{42}{}$, $\frac{11}{2}=\frac{}{16}$,

b) $\frac{2}{}=\frac{4}{14}$, $\frac{5}{7}=\frac{}{49}$, $\frac{}{56}=\frac{5}{28}$,

c) $\frac{5}{4}=\frac{20}{}$, $\frac{8}{17}=\frac{8}{}$, $\frac{6}{13}=\frac{}{39}$.

803. Kraťte některým ze společných dělitelů čitatele a jmenovatele zlomku:

a) $\frac{5}{10}, \frac{3}{9}, \frac{17}{34}, \frac{21}{28}, \frac{5}{7}$,

b) $\frac{18}{24}, \frac{15}{60}, \frac{32}{16}, \frac{25}{75}, \frac{77}{99}$.

804. Opakujte cv. 803 pro všechny společné dělitele čitatele a jmenovatele daného zlomku.

805. Kraťte postupně tyto zlomky:

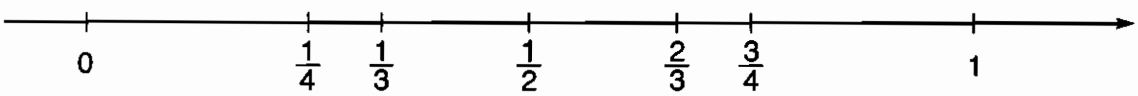
$\frac{560}{480}$, $\frac{99}{66}$, $\frac{330}{770}$, $\frac{150}{210}$.

806. Vyjádřete jako zlomek s co nejmenším jmenovatelem:

a) 10 kg z 25 kg,	18 kg z 24 kg,	5 kg z 28 kg,
b) 15 min z 1 h,	10 min ze 3 h,	36 min ze 2 h,
c) 100 ml z 1 l,	250 ml ze 2 l,	67 ml z 1 l.

● Příklad 2

Na číselné ose (viz obrázek) jsou znázorněny některé zlomky:



Na tutéž číselnou osu znázorněte následující zlomky:

$\frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{12}{12}$, $\quad \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{6}{6}$, $\quad \frac{2}{4}, \frac{2}{2}$.

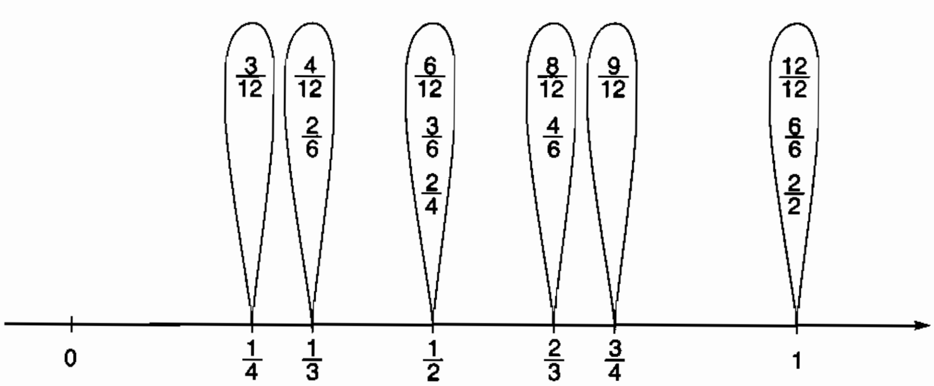
a) Zapište všechny zlomky, které se zobrazily na číselné ose do téhož bodu jako čísla 0, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$.

b) Zapište alespoň pět dalších zlomků, které se zobrazí na číselné ose do téhož bodu jako zlomek $\frac{2}{3}$.

---

a) Řešení je znázorněno na obrázku.

Na číselné ose se do téhož bodu zobrazily všechny zlomky, které se po zkrácení vhodným číslem rovnají.



b) Můžeme zapsat pouze takové zlomky, které dostaneme rozšířením zlomku $\frac{2}{3}$ nějakým přirozeným číslem, např.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30} = \frac{18}{27}.$$

Které ze zlomků $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}, \frac{4}{25}, \frac{3}{20}, \frac{2}{15}, \frac{1}{16}, \frac{8}{6}$ můžeme zapsat tak, aby měly jmenovatele 10, 100 nebo 1 000 ?

● Příklad 3

Ověřte, že zlomky

$\frac{12}{18}, \frac{10}{15}, \frac{8}{12}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$

jsou si rovny, a pro každý z těchto zlomků určete největšího společného dělitele čísel, která jsou v jeho čitateli a jmenovateli.

Pro jednotlivé zlomky postupně určíme největšího společného dělitele čísel v čitateli a ve jmenovateli a zlomky zkrátíme:

$D(12, 18) = 6$ $\qquad \frac{12}{18} = \frac{2 \,.\, 6}{3 \,.\, 6} = \frac{2}{3}$

$D(10, 15) = 5$ $\qquad \frac{10}{15} = \frac{2 \,.\, 5}{3 \,.\, 5} = \frac{2}{3}$

$D(8, 12) = 4$ $\qquad \frac{8}{12} = \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 4} = \frac{2}{3}$

$D(4, 6) = 2$ $\qquad \frac{4}{6} = \frac{2 \,.\, 2}{3 \,.\, 2} = \frac{2}{3}$

$D(2, 3) = 1$

Zlomky $\frac{12}{18}, \frac{10}{15}, \frac{8}{12}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$ jsou si rovny, protože se po krácení rovnají témuž zlomku.

Čísla, jejichž největší společný dělitel je roven jedné, se nazývají ***nesoudělná čísla.***

Nesoudělná jsou např. čísla 2 a 3, protože $D(2, 3) = 1$,
17 a 5, protože $D(17, 5) = 1$.

Při řešení úloh bývá zvykem krátit výsledný zlomek tak dlouho, až jsou jeho čitatel a jmenovatel nesoudělná čísla. O takto upraveném zlomku říkáme, že je uveden ***v základním tvaru.***

8.4. Porovnáváme zlomky

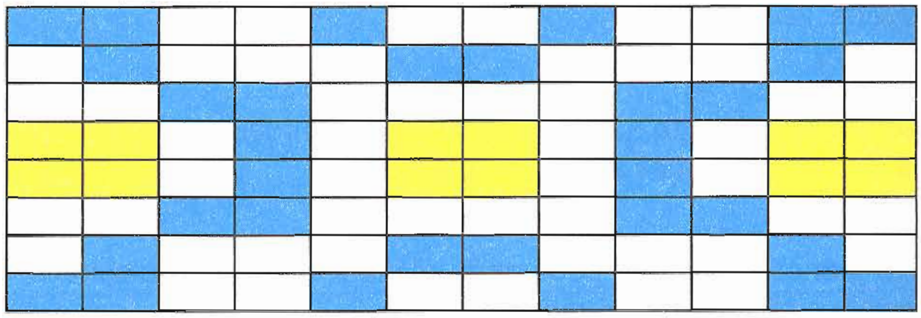
■ Úloha 1

Uspořádejte podle velikosti tyto zlomky:

a) $\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, b) $\frac{9}{11}, \frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{2}{11}$.

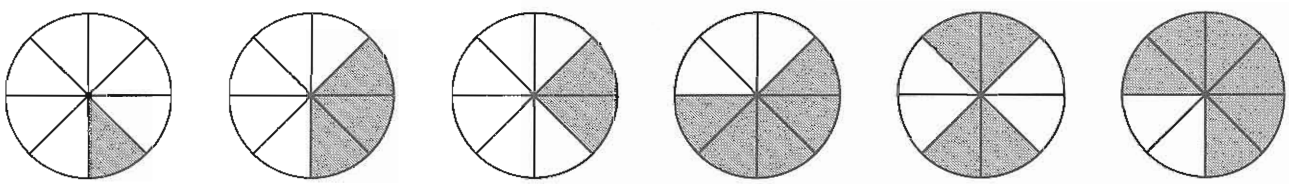
■ Úloha 2

Jakou část dlažby tvoří
a) modré dlaždice,
b) bílé dlaždice,
c) bílé a žluté dlaždice?



■ Úloha 3

Zapište zlomkem, jaké části kruhů jsou vybarveny, a zlomky porovnejte.

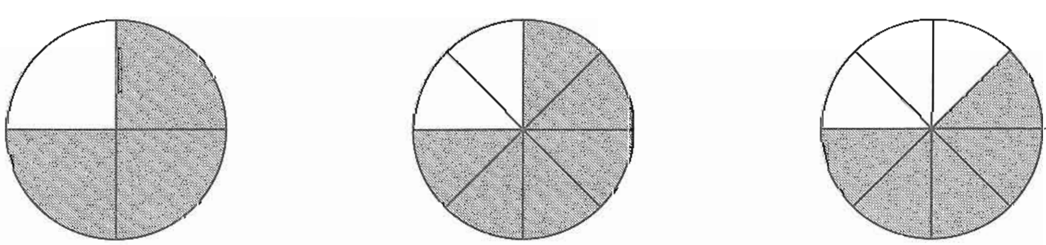


● Příklad 1

Porovnejte zlomky:
a) $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{8}$, b) $\frac{3}{4}$ a $\frac{4}{5}$.

Zlomky se stejným jmenovatelem v úloze 1 jsme mohli snadno porovnat, protože stačilo pouze porovnat počty stejně velkých částí.
Pokusíme se podobně postupovat i v případě zlomků s různými jmenovateli.

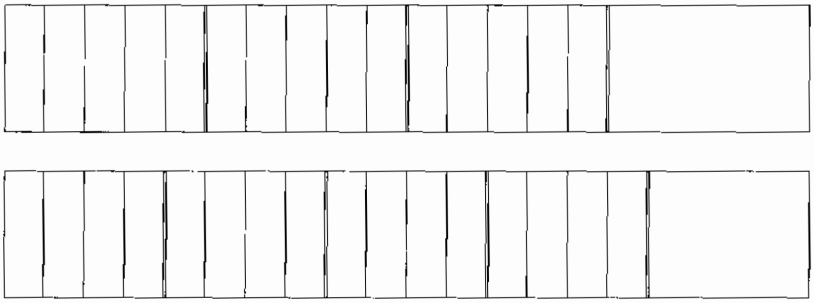
a) Oba zlomky znázorníme graficky; např.



$\frac{3}{4}$, ale $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $\frac{5}{8}$.

Proto je $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$.

b) Oba zlomky znázorníme graficky, např.



$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Proto je $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$, tedy $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

Jak porovnáváme dva zlomky?

* Mají-li dva zlomky téhož jmenovatele, porovnáme pouze jejich čitatele.
  Např.
  $$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}, \text{ protože } 3 < 5.$$

* Mají-li zlomky různé jmenovatele, rozšíříme je nejprve tak, aby měly téhož jmenovatele, a potom porovnáme čitatele rozšířených zlomků.

  Např. máme-li porovnat zlomky $\frac{5}{6}$ a $\frac{3}{4}$, rozšíříme oba zlomky na zlomky s týmž jmenovatelem (např. 24)
  $$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} \text{ a } \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$$
  a porovnáme $\frac{20}{24} > \frac{18}{24}$, proto je $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$.

Odvoďte pravidlo pro porovnávání zlomků s týmž čitatelem.

● Příklad 2

Porovnejte zlomky $\frac{5}{12}$ a $\frac{7}{15}$.

Uvedené zlomky mají různé jmenovatele. Abychom je mohli porovnat, musíme je rozšířit tak, aby oba zlomky měly téhož jmenovatele. Můžeme to např. udělat tak, že první zlomek rozšíříme jmenovatelem druhého zlomku a naopak jmenovatele druhého zlomku rozšíříme jmenovatelem prvního zlomku.

V našem případě :

$$\frac{5}{12} = \frac{15 \,.\, 5}{15 \,.\, 12} = \frac{75}{180} \text{ a } \frac{7}{15} = \frac{12 \,.\, 7}{12 \,.\, 15} = \frac{84}{180}.$$

Číslo 180 je jedním ze společných násobků čísel 12 a 15, ale je zbytečně velké.

My už ale umíme určit nejmenší společný násobek čísel 12 a 15; je to číslo $n(12, 15) = 60$.
Rozšíříme nyní znovu zlomky $\frac{5}{12}$ a $\frac{7}{15}$ tak, aby měly ve jmenovateli číslo 60:
$60 : 12 = 5$, $60 : 15 = 4$, proto

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 12} = \frac{25}{60} \text{ a } \frac{7}{15} = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 15} = \frac{28}{60}.$$

Nyní je $\frac{28}{60} > \frac{25}{60}$, a proto $\frac{7}{15} > \frac{5}{12}$.

Rozšíříme-li dva zlomky tak, že mají ve jmenovateli nejmenší společný násobek jmenovatelů obou zlomků, říkáme, že jsme určili ***nejmenší společný jmenovatel*** obou zlomků.

Např. rozšíříme-li zlomky $\frac{7}{15}$ a $\frac{5}{12}$ tak, že mají ve jmenovateli číslo 60, což je $n(12, 15)$, je číslo 60 nejmenším společným jmenovatelem těchto zlomků.

● Příklad 3

Rozhodněte, které ze zlomků $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{5}{5}$ jsou

a) menší než jedna,
b) větší než jedna,
c) rovny jedné.

Víme, že zápis $\frac{7}{9}$ označuje tu část celku, kterou dostaneme tak, že celek rozdělíme na 9 stejných částí a oddělíme z nich 7 částí. Proto je $\frac{7}{9} < \frac{9}{9}$, tedy $\frac{7}{9} < 1$.

Co ale označuje zápis $\frac{11}{9}$?

Číslo 9 ve jmenovateli zlomku opět znamená, že jsme celek rozdělili na 9 stejných částí. Číslo 11 v čitateli zlomku znamená, že máme oddělit 11 takových částí. Nevystačíme proto s jedním celkem, ale v tomto případě musíme rozdělit dva celky, každý z nich na 9 stejných částí.

Potom je $2 = \frac{18}{9}$ a snadno zjistíme, že $\frac{11}{9} > 1$.

Obdobně postupujeme i u dalších zlomků:

a) $\frac{7}{9} < 1$, $\frac{2}{5} < 1$,

b) $\frac{11}{9} > 1$, $\frac{4}{3} > 1$, $\frac{6}{5} > 1$, $\frac{8}{7} > 1$,

c) $\frac{5}{5} = 1$ (zlomek jsme krátili číslem 5).

Zlomek je menší než jedna, je-li jeho čitatel menší než jmenovatel.
Např. $\frac{7}{9} < 1$, protože $7 < 9$.

Zlomek je větší než jedna, je-li jeho čitatel větší než jmenovatel.
Např. $\frac{11}{9} > 1$, protože $11 > 9$.

Zlomek je roven jedné, jestliže jsou si rovny jeho čitatel a jmenovatel.
Např. $\frac{11}{11} = 1$, protože $11 = 11$.

Cvičení

807. Čísla $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}, 2, \frac{7}{9}$ uspořádejte podle velikosti a zobrazte je na číselné ose.

808. Doplňte chybějící znaménka <, >, = v těchto výrazech:

a) $\frac{5}{9} \quad \frac{12}{18}$, $\quad \frac{4}{7} \quad \frac{2}{7}$, $\quad 2 \quad \frac{5}{2}$,

b) $\frac{7}{6} \quad \frac{5}{7}$, $\quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{11}$, $\quad \frac{12}{5} \quad 3$,

c) $\frac{4}{6} \quad \frac{4}{5}$, $\quad \frac{8}{7} \quad \frac{16}{14}$, $\quad \frac{9}{7} \quad \frac{7}{9}$.

809. Čísla $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{6}{6}, \frac{2}{8}, \frac{6}{11}, \frac{2}{12}, \frac{5}{7}, \frac{9}{9}, 0, \frac{4}{10}, 2$ rozdělte do dvou skupin tak, aby v první skupině byla čísla menší než jedna a ve druhé čísla větší než jedna.
Podařilo se vám zařadit všechna čísla? Pokud ne, zdůvodněte to.

Zjistěte, jakou celkovou rozlohu má byt, který patří vašim rodičům.

a) Vyjádřete zlomkem, jakou část z celkové rozlohy bytu zaujímají jednotlivé místnosti (obývací pokoj, váš pokoj, kuchyň apod.).

b) Porovnejte velikosti jednotlivých částí vašeho bytu.

c) Sestavte a řešte podobné úlohy, týkající se bytu vašich prarodičů, zahrady, pole ... .

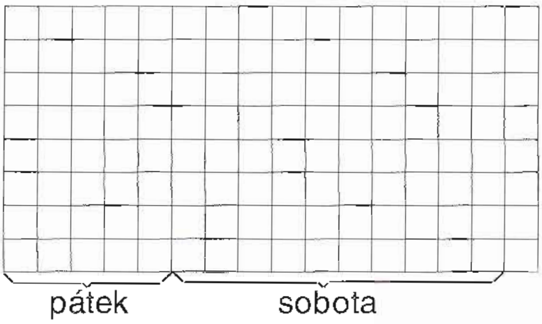
Najděte alespoň jeden zlomek, jehož obraz je na číselné ose mezi obrazy těchto čísel:

a) $\frac{3}{5}$ a $\frac{6}{5}$, b) $\frac{3}{5}$ a $\frac{4}{5}$, c) $\frac{3}{5}$ a $\frac{6}{10}$.

8.5. I zlomky se sčítají a odčítají

Úloha 1

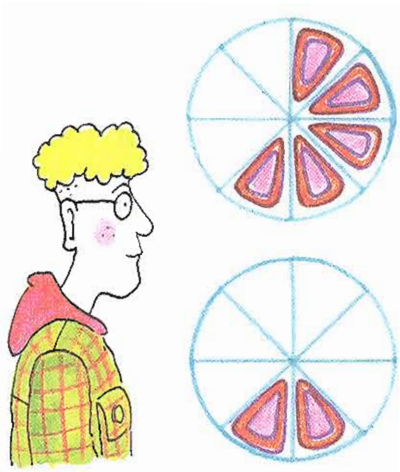
Pan Ajnštajn se rozhodl, že položí v chodbě nové dlaždice. Práce mu šla docela od ruky. Začal v pátek odpoledne a v sobotu navečer byl už skoro hotov (viz obrázek) .

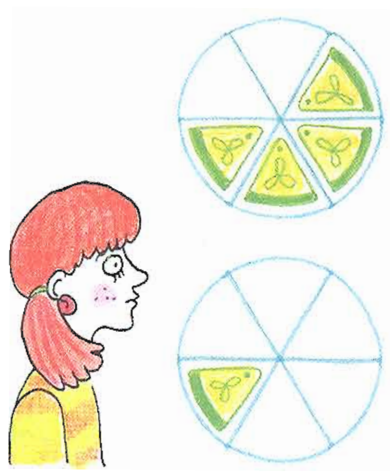


a) Jakou část chodby vydláždil pan Ajnštajn v pátek a jakou část v sobotu?
b) Jakou část chodby vydláždil pan Ajnštajn dohromady v pátek a v sobotu?
c) Jakou část chodby má ještě vydláždit?

Úloha 2

Betka a Kryšpín mají své oblíbené druhy „trojúhelníčkových" sýrů. Jak to vypadalo s jejich zásobami jednoho dne ráno a večer je vidět na obrázku.





a) Jakou část sýrů z původně plné krabičky snědla Betka během dne?
b) Jakou část sýrů z původně plné krabičky snědl Kryšpín během dne?

Příklad 1

Dům u řeky má tři majitele. Panu Jandovi patří jedna jeho třetina, panu Vondrovi jeho dvě pětiny a paní Zahálkové zbytek.
a) Jakou část domu vlastní dohromady pánové Janda a Vondra?
b) Jakou část domu vlastní paní Zahálková?
c) Který z pánů vlastní větší část domu a o kolik je jeho část větší (menší) než část domu, která patří paní Zahálkové?

Dům můžeme jen těžko rozdělit na potřebný počet stejných částí. Hodnota domu se ale nejčastěji vyjadřuje v penězích a peněžní částky už můžeme dělit bez problémů.

a) pan Janda vlastní $\frac{1}{3}$ domu,

pan Vondra vlastní $\frac{2}{5}$ domu,

dohromady vlastní oba pánové $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$ domu.

Jak *sečteme* zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{5}$?

Budeme postupovat podobně jako při porovnávání zlomků.

* Nejprve určíme $n(3, 5) = 15$, což je nejmenší společný jmenovatel zlomků $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{5}$.
* Zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{5}$ rozšíříme:

15 : 3 = 5 , proto $\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15}$,

15 : 5 = 3 , proto $\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15}$.

Potom $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$.

Zlomek je v základním tvaru, protože čísla 11 a 15 jsou nesoudělná.

Pánové Janda a Vondra vlastní dohromady $\frac{11}{15}$ celého domu u řeky.

b) Všichni tři majitelé vlastní dohromady 1 (celý) dům,

z toho pánové dohromady $\frac{11}{15}$ domu,

na paní Zahálkovou zbývá $\left(1 - \frac{11}{15}\right)$ domu.

Jak *odečteme* čísla 1 a $\frac{11}{15}$?

Budeme postupovat podobně jako při sčítání zlomků.

* Číslo 1 vyjádříme nejprve jako zlomek $1 = \frac{15}{15}$, protože jsme už určili, jakou část domu vlastní pánové Janda a Vondra, a ta byla vyjádřena v patnáctinách.
* Vypočteme:

$$1 - \frac{11}{15} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{15 - 11}{15} = \frac{4}{15}.$$

Zlomek $\frac{4}{15}$ je už vyjádřen v základním tvaru, protože čísla 4 a 15 jsou nesoudělná.

Paní Zahálková vlastní $\frac{4}{15}$ domu u řeky.

c) Při řešení úlohy a) jsme zjistili, že

pan Janda vlastní $\frac{5}{15}$ domu u řeky,

pan Vondra vlastní $\frac{6}{15}$ domu u řeky.

Hned vidíme, že pan Vondra vlastní větší část domu než pan Janda.

Pan Vondra vlastní $\frac{6}{15}$ domu u řeky,

paní Zahálková vlastní $\frac{4}{15}$ domu u řeky.

Snadno vypočteme, že část domu, kterou vlastní pan Vondra, je o $\frac{2}{15}$ větší než část domu, která patří paní Zahálkové.

	Jak sčítáme dva zlomky?	**Jak odčítáme dva zlomky?**
Mají-li téhož jmenovatele	Jejich *součtem* je zlomek s týmž jmenovatelem a jeho čitatel je roven *součtu* čitatelů obou zlomků.	Jejich *rozdílem* je zlomek s týmž jmenovatelem a jeho čitatel je roven *rozdílu* čitatelů obou zlomků.
Např.	$\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}.$	$\frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11-4}{15} = \frac{7}{15}.$
Stručně:	*Dva zlomky se stejným jmenovatelem sečteme tak, že sečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.*	*Dva zlomky se stejným jmenovatelem odečteme tak, že odečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.*

	Jak sčítáme dva zlomky?	Jak odčítáme dva zlomky?
Mají-li různé jmenovatele	Najdeme nejprve jejich nejmenšího společného jmenovatele a rozšířené zlomky *sečteme* jako zlomky s týmž jmenovatelem.	Najdeme nejprve jejich nejmenšího společného jmenovatele a rozšířené zlomky *odečteme* jako zlomky s týmž jmenovatelem.
Např.	$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$, protože číslo 15 je nejmenším společným jmenovatelem čísel 3 a 5.	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$, protože číslo 15 je nejmenším společným jmenovatelem čísel 3 a 5.

Poznámka: Někdy je výhodné (hlavně z časových důvodů) najít společného jmenovatele rozšířených zlomků jako součin jmenovatelů sčítaných zlomků.

● Cvičení

V následujících cvičeních uvádějte výsledky ve tvaru zlomků v základním tvaru.

810. Vypočtěte:

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{6}$, $\quad \frac{2}{8} + \frac{7}{8}$,

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9}$, $\quad \frac{8}{5} + \frac{4}{20}$,

c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{7}$, $\quad \frac{12}{8} + \frac{2}{12}$.

811. Vypočtěte:

a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$, $\quad \frac{5}{9} - \frac{2}{9}$,

b) $\frac{6}{15} - \frac{1}{5}$, $\quad \frac{8}{10} - \frac{3}{20}$,

c) $\frac{5}{3} - \frac{2}{2}$, $\quad \frac{7}{9} - \frac{1}{4}$.

812. K číslu 5 přičtěte číslo:

a) $\frac{4}{6}$, b) $\frac{2}{9}$, c) $\frac{8}{7}$, d) $\frac{4}{11}$.

813. K číslu 4 přičtěte číslo:

a) $\frac{5}{20}$, b) $\frac{6}{13}$, c) $\frac{9}{5}$, d) $\frac{8}{4}$.

814. Od čísla 7 odečtěte číslo:

a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{9}{8}$, c) $\frac{4}{12}$, d) $\frac{6}{9}$.

815. Překreslete do sešitu následující obrázky a doplňte chybějící čísla a znaky:

a)

$\boxed{\frac{2}{7}} \xrightarrow{+} \boxed{\frac{6}{7}}$

$\uparrow \qquad \downarrow -\frac{2}{7}$

$\boxed{0} \rightarrow \boxed{}$

b)

$\boxed{\frac{3}{8}} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} \boxed{}$

$\downarrow -\frac{1}{16} \qquad \downarrow$

$\boxed{} \rightarrow \boxed{1}$

c)

$\boxed{\frac{1}{5}} \xrightarrow{+} \boxed{\frac{7}{20}} \rightarrow \boxed{\frac{3}{20}} \rightarrow \boxed{\frac{3}{5}}$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$\boxed{\frac{7}{5}} \rightarrow \boxed{\frac{4}{5}} \xrightarrow{+\frac{9}{20}} \boxed{} \rightarrow \boxed{2}$

816. Znázorněte graficky:

a) $\frac{2}{6} + \frac{4}{5}$,

b) $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$.

Napište všechny zlomky se jmenovatelem 9, které jsou větší než 3 a menší než 4, a znázorněte je na číselné ose.

Doplňte zbývajícího sčítance tak, aby byl součet obou sčítanců roven 2.

První sčítanec	$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$			$\frac{7}{7}$		$-\frac{8}{6}$		$\frac{105}{35}$
Druhý sčítanec		$\frac{5}{4}$			$-\frac{1}{5}$	2		$\frac{17}{6}$		5	

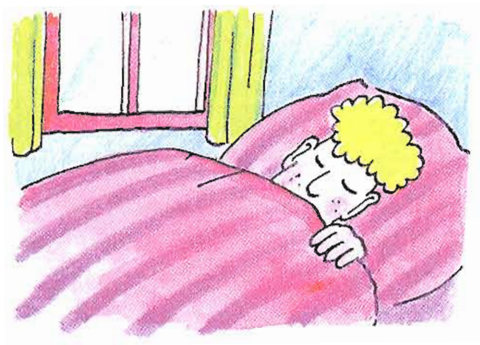
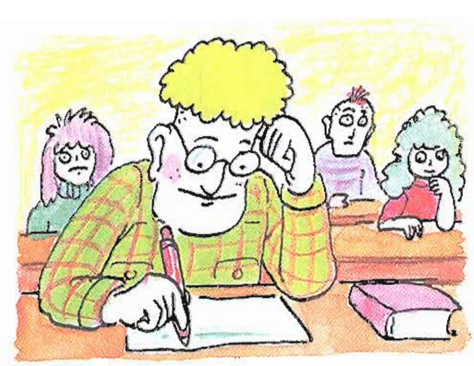
Sledujte alespoň jeden týden svůj denní režim. Časové údaje můžete zapisovat např. do tabulky tak, jako to dělal Kryšpín, který všechny časové údaje do tabulky zapisoval v hodinách (viz následující tabulka).

a) Vyjádřete zlomkem, jakou část dne (zde uvažujeme jeden den jako dobu 24 hodin)
- strávíte ve škole,
- prospíte,
- věnujete sportu,
- pomáháte rodičům apod.

b) Vyjádřete zlomkem, jakou část určitého dne
- jste ve škole nebo se připravujete na vyučování,
- sportujete nebo odpočíváte.

c) Proč nejsou součty v jednotlivých sloupcích rovny 24 hodinám?

d) Sestavujte sami další podobné úlohy na počítání se zlomky a zamýšlejte se přitom nad svým denním režimem.

	Den (leden)	17	18	19									
	Spánek	8	9	8									
	Osobní hygiena	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$									
	Cesta do a ze školy	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$									
	Škola	5	6	8									

Pokračování na str. 144

Pokračování	Den (leden)	17	18	19									
	Příprava do školy	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$									
	Sport	2	0	1									
	Pomoc doma	1	1	$\frac{1}{2}$									
	Odpočinek	2	1	1									

8.6. Násobíme a dělíme zlomky

■ Úloha 1

Betka a Kryšpín pomáhali o prázdninách se zakládáním nového lesa. První den zasadili jednu pětinu z celkového počtu stromků, které slíbili vysadit. Druhý den se jim práce dařila, a tak zasadili třikrát více stromků než první den, ale třetí den pršelo, a proto vysadili dvakrát méně stromků než první den.

a) Znázorněte řešení úlohy pomocí vhodného diagramu.

b) Splnili Betka s Kryšpínem svůj slib (vysadili plánované množství stromků) během uvedených tří dní?

■ Úloha 2

Lenka uspořila jednu sedminu částky, kterou má uspořenou Betka, ale Jana uspořila sedmkrát méně než Betka. Kdo uspořil více korun, Lenka nebo Jana?

● Příklad 1

Pan Kouba zasel na 12 hektarech pole obilí; pět šestin z toho byla pšenice. Na kolika hektarech pole zasel pan Kouba pšenici?

Celkem zaseto	12 ha,
z toho jedna šestina	(12 : 6) ha = 2 ha,
pět šestin	(12 : 6) . 5 ha = 10 ha.

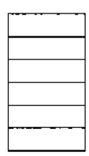
Pan Kouba zasel pšenici na 10 hektarech pole.

Úlohu můžeme řešit i jinak.

Máme vypočítat $\frac{5}{6}$ ze 12 ha. Náš postup řešení ale nezávisí na tom, zda počítáme $\frac{5}{6}$ z 12 ha nebo z jiných 12 celků. Proto už dále budeme uvažovat jen 12 celků.

Celý postup graficky znázorníme.

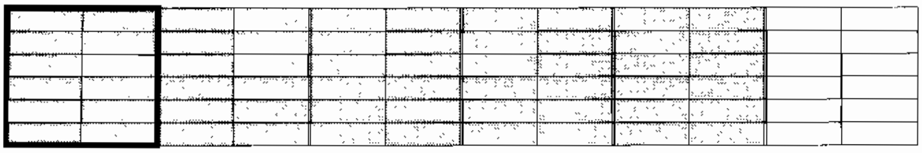
Na našem obrázku znázorňuje jeden celek obdélník:



V předcházející části řešení jsme počítali:

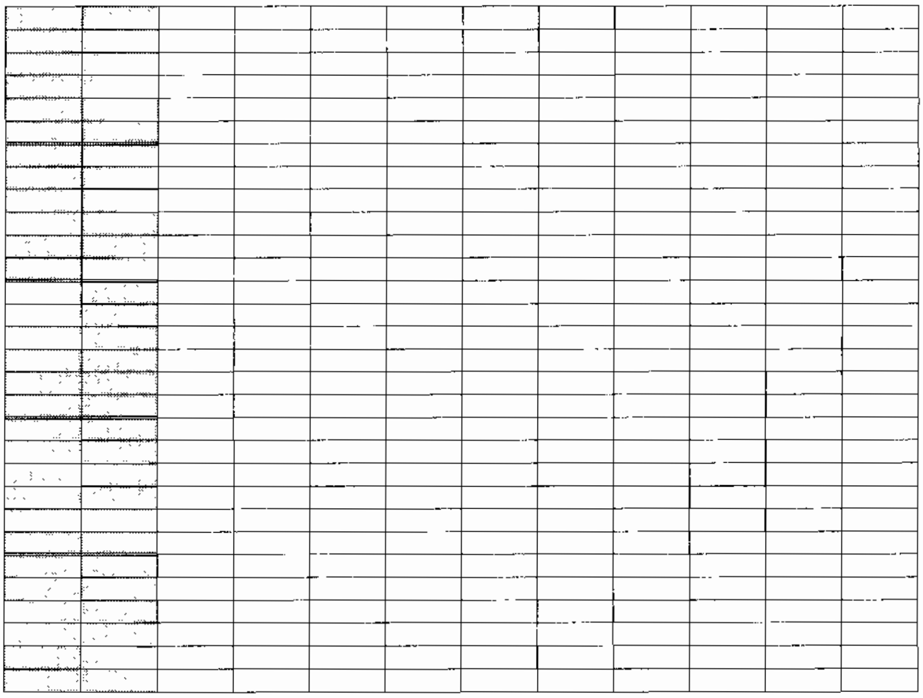
$$(12 : 6) \,.\, 5 = \frac{12}{6} \,.\, 5,$$

což můžeme graficky znázornit např. takto:



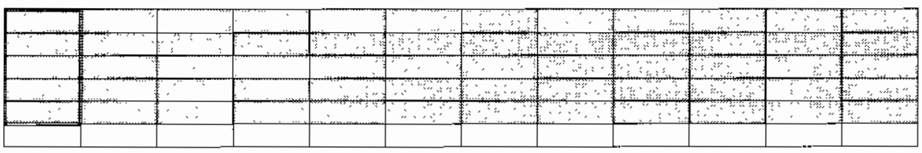
Jedna šestina z 12 je silně orámována,
pět šestin z 12 je šedě vybarveno.

Zápis $\frac{12}{6}$. 5 upravíme jinak: $\frac{12}{6} \cdot 5 = \frac{12 \cdot 5}{6}$ a znázorníme ho takto:



Jedna šestina z 12 . 5 je šedě vybarvena.

Také zápis $\frac{12 \cdot 5}{6}$ můžeme ještě upravit: $\frac{12 \cdot 5}{6} = 12 \cdot \frac{5}{6}$ a znázornit takto:



Pět šestin z 1 je orámováno dvojitě,
pět šestin z 12 je šedě vybarveno.

Snadno se přesvědčíme, že se obsahy vyznačených částí jednotlivých obdélníků rovnají, a proto můžeme počítat

$$\frac{5}{6} \text{ ze 12 je rovno } 12 \cdot \frac{5}{6}.$$

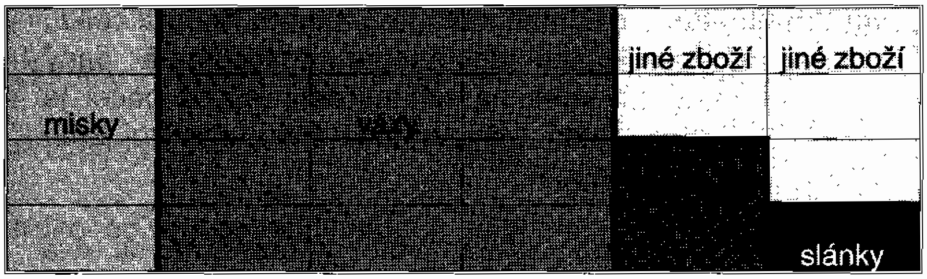
Dobře si tento postup zapamatujte, budeme ho při řešení úloh často používat.

● Příklad 2

Paní Lukášová dostala do své prodejny novou zásilku keramiky. Z celkového počtu nově dodaných kusů keramiky byla pouze jedna šestina misek, váz bylo třikrát více než misek, cukřenek dvakrát méně než misek a počet slánek byl roven čtvrtině z počtu misek v zásilce.
a) Znázorněte pomocí vhodného diagramu rozdělení jednotlivých druhů zboží v nové zásilce.
b) Vypočtěte, jakou část zásilky tvořily misky, vázy, cukřenky, slánky.
c) Byl v zásilce i nějaký jiný druh zboží? Pokud ano, vypočtěte, jaká část zásilky to byla.

Po prvním přečtení zadání příkladu se Betce zdálo, že příklad nemůže vyřešit, protože v jeho zadání chybí údaj o tom, kolik bylo celkem kusů zboží v nové zásilce.
Kryšpín jí však vysvětlil, že jejím úkolem není spočítat počet kusů jednotlivých druhů keramiky v zásilce, ale že se má zajímat o to, jakou část celé zásilky tvoří jednotlivé druhy zboží. Proto vůbec nepotřebuje údaj o počtu kusů zboží v zásilce.

a) Celou zásilku znázorníme pomocí dostatečně velkého obdélníku (může třeba znázorňovat bednu, ve které keramiku přivezli).



b) **Misek** byla jedna šestina celé zásilky $\frac{1}{6}$,

váz bylo třikrát více než misek $\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

cukřenek bylo dvakrát méně než misek $\frac{1}{6} : 2$ je $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{6}$, tj. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$,

slánek byla čtvrtina z počtu misek $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{6}$, tj. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Správnost výpočtů snadno ověříme i pomocí diagramu z části a) řešení příkladu.

Z celkového počtu kusů keramiky v nové zásilce byla jedna šestina misek, jedna polovina váz, jedna dvanáctina cukřenek a jedna čtyřiadvacetina slánek.

c) Z diagramu v části a) řešení příkladu je zřejmé, že v zásilce byl ještě alespoň jeden další druh zboží. Jaká část zásilky to byla, určíme nejprve pomocí uvedeného diagramu.

Na **jiné zboží** zbývá (sledujte diagram)
polovina z části připadající na **misky** $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{6}$, tj. $\frac{1}{12}$

a tři čtvrtiny z části připadající na misky $\frac{1}{3}$ z $\frac{1}{6}$, tj. $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$,

dohromady $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \frac{5}{24}$.

Správnost výpočtu ověříme pomocí výsledku části b) řešení.

Z celé zásilky **dohromady** misek, váz, cukřenek a slánek:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{4 + 12 + 2 + 1}{24} = \frac{19}{24},$$

na **jiné zboží zbývá** (počet kusů zboží v celé zásilce představuje jeden celek):

$$1 - \frac{19}{24} = \frac{24}{24} - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}.$$

V zásilce byl ještě alespoň jeden další druh zboží, připadalo na něj pět čtyřiadvacetin z celkového počtu kusů zboží v celé zásilce.

Jak násobíme zlomek přirozeným číslem?

Násobení zlomku přirozeným číslem můžeme nahradit opakovaným sčítáním téhož zlomku.

Např. $\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{6} = \frac{3}{6}.$

Zlomek násobíme přirozeným číslem tak, že tímto číslem vynásobíme jeho čitatele.

Např. $\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{3}{6}.$

Jmenovatel zlomku se při násobení zlomku přirozeným číslem nemění.

Jak dělíme zlomek přirozeným číslem?

Dělení zlomku přirozeným číslem můžeme nahradit určením té části celku, kterou dostaneme, rozdělíme-li daný zlomek na stejné části, jejichž počet je roven přirozenému číslu, kterým jsme dělili.

Např. $\frac{1}{6} : 2$, proto $\frac{1}{6}$ rozdělíme na dvě stejné části, tedy na dvanáctiny.

Zlomek dělíme přirozeným číslem tak, že tímto číslem vynásobíme jeho jmenovatele.

Např. $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}.$

Čitatel zlomku se při dělení zlomku přirozeným číslem nemění.

● Příklad 3

Ze všech žáků ve třídě mají $\frac{4}{5}$ žáků jednoho sourozence a z nich jsou $\frac{2}{3}$ dívek.

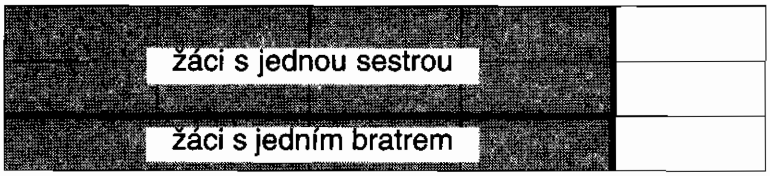
Znázorněte graficky a vypočtěte:

a) jaká část žáků ve třídě má jednu sestru,

b) jaká část žáků ve třídě má jednoho bratra,

c) kolik je žáků ve třídě.

Počet všech žáků ve třídě znázorníme pomocí obdélníku s vhodně volenými délkami stran.



žáci, kteří
- *nemají žádného sourozence*
- *mají alespoň dva sourozence*

žáci, kteří mají jednoho sourozence

a) Při řešení příkladu se zajímáme pouze o tu část žáků ve třídě, kteří mají jen jednoho sourozence (na obrázku vybarveno šedě); neuvažujeme tedy žáky, kteří mají např. jednoho bratra a jednu sestru.

Z celkového počtu žáků ve třídě mají jednoho sourozence $\frac{4}{5}$ žáků.

Z tohoto počtu sourozenců jsou $\frac{2}{3}$ dívek.

Pouze jednu sestru (a žádného bratra) proto mají $\frac{2}{3}$ ze $\frac{4}{5}$ žáků.

Jak vypočítáme $\frac{2}{3}$ ze $\frac{4}{5}$?

Nejprve rozdělíme jednu pětinu na třetiny.

Zlomek $\frac{1}{5}$ budeme dělit třemi, tedy $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{5 \,.\, 3} = \frac{1}{15}$.

Počítáme $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{5}$, tedy $(\frac{1}{5} : 3) \,.\, 2 = \frac{1}{15} \,.\, 2 = \frac{2}{15}$.

Nakonec vypočteme $\frac{2}{3}$ ze $\frac{4}{5}$, tedy $4 \,.\, (\frac{1}{5} : 3) \,.\, 2 = \frac{1}{15} \,.\, 8 = \frac{8}{15}$.

Obdobně jako při řešení příkladu 1 můžeme napsat, že $\frac{2}{3}$ ze $\frac{4}{5}$ se rovnají $\frac{4}{5} \,.\, \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

Z celkového počtu žáků ve třídě jich má osm patnáctin jednu sestru (a žádného bratra).

b) Jedna třetina z žáků, kteří mají pouze jednoho sourozence, má bratra (protože zbývající dvě třetiny měly sestru).

Počítáme proto $\frac{1}{3}$ ze $\frac{4}{5}$ se rovná $\frac{4}{5} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

Z celkového počtu žáků ve třídě jich mají čtyři patnáctiny jednoho bratra (a žádnou sestru).

c) K určení celkového počtu žáků ve třídě je třeba si uvědomit, že údaje o některých skupinách žáků z této třídy byly vyjádřeny v patnáctinách, a to zlomkem v základním tvaru. Nejmenší počet žáků ve třídě může proto být 15. V úvahu ještě připadá počet 30 žáků ve třídě; více žáků (např. 45) ve třídě být nemůže, protože to nedovolují v současnosti platné předpisy.

Příklad 4

V čokoládovnách plní lentilky do krabiček různé velikosti. Vypočtěte, kolik krabiček bu-

dou potřebovat na zabalení 300 kg lentilek, jestliže jedno balení lentilek v krabičce má hmotnost
a) 125 gramů,
b) 375 gramů.

Příklad můžeme řešit různými způsoby. Dva z nich ukážeme.

1. Všechny údaje ze zadání úlohy budeme uvažovat v gramech.

a) 1 krabička lentilek — 125 g
k krabiček lentilek — 300 kg = 300 000 g

$$k = 300\,000 : 125 = 2\,400$$

Na zabalení 300 kg lentilek je potřebí 2 400 krabiček (v balení po 125 gramech).

b) 1 krabička lentilek — 375 g
m krabiček lentilek — 300 kg = 300 000 g

$$m = 300\,000 : 375 = 800$$

Na zabalení 300 kg lentilek je potřebí 800 krabiček (v balení po 375 gramech).

2. Všechny údaje ze zadání úlohy budeme uvažovat v kilogramech.

a) 1 krabička lentilek — 125 g = $\frac{1}{8}$ kg
k krabiček lentilek — 300 kg

Jedno krabička lentilek má hmotnost $\frac{1}{8}$ kg, proto k zabalení 1 kg lentilek potřebujeme 8 krabiček a k zabalení 300 kg lentilek 300krát více krabiček, tedy 2 400 krabiček.

Stručně zapíšeme: $k = 300 : \frac{1}{8} = 300 \cdot 8 = 2\,400.$

Na zabalení 300 kg lentilek je potřeba 2 400 krabiček (v balení po $\frac{1}{8}$ kilogramu).

b) 1 krabička lentilek — 375 g = $\frac{3}{8}$ kg
m krabiček lentilek — 300 kg

Jedno krabička lentilek má hmotnost $\frac{3}{8}$ kg, což je třikrát větší hmotnost než hmotnost, jakou mělo jedno balení lentilek v předchozí části úlohy.
Proto k zabalení zabalení stejného množství lentilek budeme potřebovat třikrát méně krabiček než předtím.

Stručně zapíšeme: $m = 300 : \frac{3}{8} = (300 \cdot 8) : 3 = 2\,400 : 3 = 800.$

Nebo také jinak:

$$m = 300 : \frac{3}{8} = (300 \cdot 8) : 3 = 300 \cdot (8 : 3) = 300 \cdot \frac{8}{3} = \frac{300 \cdot 8}{3} = \frac{2\,400}{3} = 800.$$

Na zabalení 300 kg lentilek je potřebí 800 krabiček (v balení po $\frac{3}{8}$ kilogramu).

● Příklad 5

Betka s Magdou pomáhaly ve skladu učebnic. Vypočítaly, že do regálu vysokého 75 cm mohou na sebe položit 60 učebnic, jestliže má každá z nich tloušťku $\frac{5}{4}$ cm. Přesvědčte se o správnosti jejich výpočtu.

V regálu je potřebí (do výšky):

na 1 učebnici $\frac{5}{4}$ cm,

na 60 učebnic $60 \cdot \frac{5}{4}$ cm $= \frac{300}{4}$ cm $=$ 75 cm.

Kontrolu výpočtu můžeme provést i jiným způsobem.
V regálu je potřebí (do výšky):

na 1 učebnici $\frac{5}{4}$ cm,

na x učebnic 75 cm,

$$x = 75 : \frac{5}{4} = (75 : 4) \cdot 5 = 75 \cdot \frac{4}{5} = \frac{75 \cdot 4}{5} = \frac{15 \cdot 4}{1} = 60.$$

Betčin a Magdin výpočet byl správný.

Jak násobíme zlomek zlomkem?

Násobíme-li dva zlomky, dostaneme zlomek, v jehož

* čitateli je součin čitatelů obou zlomků,
* jmenovateli je součin jmenovatelů obou zlomků.

Např. $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$.

Jak dělíme zlomek zlomkem?

Dělení dvou zlomků nahradíme násobením zlomků.

Např. $\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$.

Zlomek $\frac{4}{5}$ nazýváme ***zlomek převrácený*** k zlomku $\frac{5}{4}$. O dvojici zlomků $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ říkáme, že je to *dvojice navzájem převrácených zlomků.*

Zlomek dělíme zlomkem tak, že první zlomek v pořadí násobíme převráceným zlomkem k druhému zlomku v pořadí.

Příklad 6

Vypočtěte:

a) $\frac{84}{78} \cdot \frac{52}{40}$, b) $\frac{25}{78} : \frac{52}{40}$.

Zatím jsme dva zlomky násobili tak, že jsme zapsali jako zlomek součin jejich čitatelů a jmenovatelů (příp. jsme ještě tento zlomek zapsali v základním tvaru). Při řešení našeho příkladu by byl tento postup zbytečně zdlouhavý, protože bychom museli násobit „velká" čísla a potom ještě krátit, abychom dostali zlomek v základním tvaru.
Budeme proto postupovat jinak. Pokud to bude možné, budeme nejprve krátit, a teprve potom násobit.

a)

$$\frac{84}{78} \cdot \frac{52}{40} = \overset{\text{krátili jsme dvěma}}{\frac{42}{39}} \cdot \overset{\text{krátili jsme čtyřmi}}{\frac{13}{10}} = \overset{\text{krátili jsme třemi}}{\frac{14}{13}} \cdot \frac{13}{10} = \frac{14 \,.\, 13}{13 \,.\, 10} = \overset{\text{krátili jsme třinácti}}{\frac{7}{5}}$$

b)

$$\frac{26}{78} : \frac{52}{40} = \overset{\text{dělení jme nahradili násobením}}{\frac{26}{78} \cdot \frac{40}{52}} = \overset{\text{krátili jsme dvěma}}{\frac{13}{39}} \cdot \overset{\text{krátili jsme čtyřmi}}{\frac{10}{13}} = \overset{\text{krátili jsme třinácti}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{10}{13} = \frac{10}{39}$$

Cvičení

V následujících cvičeních uvádějte výsledky jako zlomky v základním tvaru.

817. Znázorněte graficky:

a) $\frac{1}{4}$ z 5 kg, b) $\frac{3}{5}$ z 9 m,

c) $\frac{2}{7}$ z 13 Kč, d) $\frac{12}{11}$ ze 100 l.

818. Znázorněte graficky:

a) $\frac{2}{3}$ ze 40, b) $\frac{5}{6}$ ze 17,

c) $\frac{9}{8}$ ze 35, d) $\frac{4}{9}$ ze 2.

819. Znázorněte graficky:

a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{4}{28}$,

c) $\frac{14}{27}$, d) $\frac{22}{20}$.

820. Číslo 5 násobte číslem:

a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{9}{5}$, d) $\frac{10}{8}$.

821. Číslo 5 dělte číslem:

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{5}{4}$, d) $\frac{8}{9}$.

822. Číslo $\frac{2}{3}$ násobte číslem:

a) $\frac{5}{9}$, b) $\frac{12}{8}$, c) $\frac{4}{3}$, d) $\frac{3}{4}$.

823. Číslo $\frac{2}{3}$ dělte číslem:

a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{9}{4}$, c) $\frac{4}{9}$, d) $\frac{8}{18}$.

824. Překreslete do sešitu následující obrázky a doplňte chybějící čísla:

a)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\frac{2}{3}} \arrow[r, ". 5"] & \boxed{} \arrow[d, ":4"] \\
\boxed{} \arrow[u] & \boxed{} \arrow[l, ". 12"']
\end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\frac{5}{8}} \arrow[r, ": 4"] \arrow[d, "."] & \boxed{} \arrow[d, "."] \\
\boxed{} & \boxed{\frac{5}{2}} \arrow[l, ". \frac{1}{4}"']
\end{tikzcd}$$

c)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{3} \arrow[r, ":"] & \boxed{\frac{3}{4}} \arrow[r, "."] & \boxed{\frac{3}{2}} \arrow[r] & \boxed{\frac{1}{2}} \arrow[d, ":"] \\
\boxed{\frac{2}{5}} \arrow[u] & \boxed{2} \arrow[l] & \boxed{\frac{1}{4}} \arrow[l, "."'] & \boxed{\frac{5}{2}} \arrow[l, "."']
\end{tikzcd}$$

825. Znázorněte graficky:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$, b) $\frac{3}{4} : 5$.

Doplňte zbývajícího činitele tak, aby byl součin obou činitelů roven 1.

První činitel	2		$\frac{2}{3}$			$-\frac{5}{8}$		-11		$\frac{5}{4}$	
Druhý činitel		6		0	$\frac{4}{7}$		$\frac{9}{10}$		$-\frac{11}{3}$		-1

826. Vypočtěte:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{21}$, b) $\frac{6}{15} \cdot \frac{4}{3}$, c) $-\frac{8}{7} \cdot \frac{5}{9}$, d) $\frac{2}{9} \cdot (-\frac{3}{4})$.

827. Vypočtěte:

a) $\frac{7}{5} : \frac{14}{21}$, b) $\frac{4}{13} : \frac{13}{5}$, c) $-\frac{6}{4} : \frac{2}{15}$, d) $\frac{2}{14} : (-\frac{8}{7})$.

828. Vypočtěte:

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} + \frac{5}{6}$, b) $\frac{2}{3} : (\frac{4}{9} + \frac{5}{6})$, c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} : \frac{5}{6}$, d) $(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}) : \frac{5}{6}$.

829. Vypočtěte:

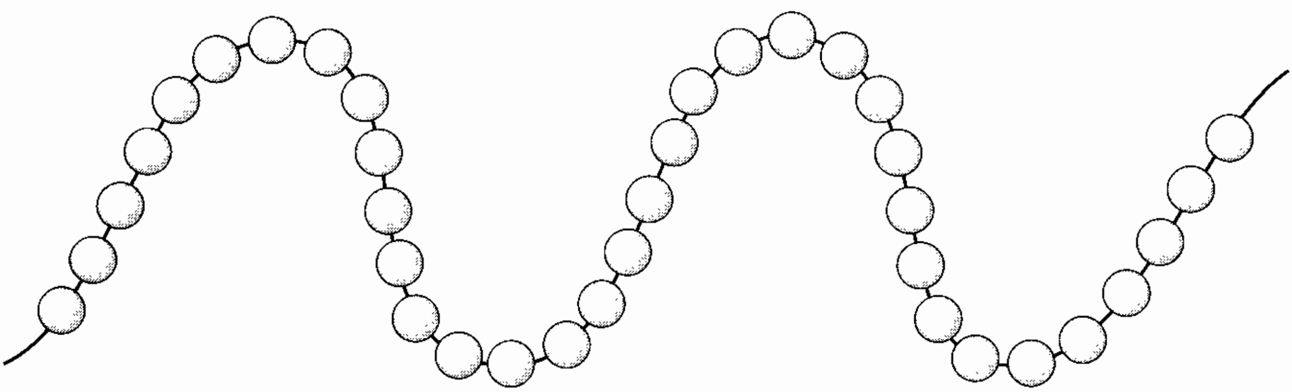
a) $\frac{7}{3} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{6}) \cdot \frac{12}{7}$, b) $-\frac{8}{5} : (\frac{14}{8} - \frac{5}{3}) - 2$, c) $\frac{-17}{2} \cdot (\frac{5}{4} - \frac{9}{12}) - \frac{6}{5} : \frac{9}{10}$.

830. Vypočtěte:

a) $-\frac{5}{8} \cdot (-\frac{4}{9}) - \frac{9}{4} : \frac{12}{15}$, b) $\frac{21}{72} : \frac{7}{9} - \frac{5}{4} : \frac{15}{16}$, c) $-\frac{42}{25} - \frac{5}{8} : \frac{1}{12} - \frac{6}{5}$.

831. Šestina ze všech korálů na šňůře je modrých. Červených korálů je na šňůře třikrát více než modrých.

a) Znázorněte to graficky.



b) Jaká část ze všech korálů na šňůře má červenou barvu?

c) Kolik korálů na šňůře můžete obarvit jinou než modrou nebo červenou barvou?